

H.A. Kramers (Utrecht), Die Dispersion und Absorption von Röntgenstrahlen<sup>1)</sup>.

Die Verwendung halb-klassischer, halb-quantentheoretischer Vorstellungen gestattet Aussagen über das analytische Verhalten des komplexen Brechungsexponenten in einem absorbierenden Medium als Funktion der Frequenz des einfallenden Lichtes.

Auf ein Atom falle eine ebene, linear polarisierte Lichtwelle mit dem elektrischen Vektor

$$E = R (A e^{i\omega t}) \quad (R = \text{Reeller Teil}).$$

Ist der Atomradius klein gegen die Wellenlänge des einfallenden Lichtes, so läßt sich das Atom durch einen Dipol vom Betrage

$$P = R (B e^{i\omega t})$$

darstellen. Der Polarisationskoeffizient

$$\zeta = \frac{B}{A} = \xi(\omega) + i\eta(\omega)$$

steht mit dem Brechungsexponenten  $n$  in der Beziehung

$$3 \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = 4\pi N \zeta, \quad (1)$$

wo  $N$  die Zahl der Atome pro Volumeneinheit bedeutet; dies geht für ein sehr verdünntes Medium ( $n^2 \cong 1$ ) über in

$$n^2 = 1 + 4\pi N \zeta. \quad (1a)$$

Beim klassischen harmonischen Oszillator von der Ladung  $e$ , der Masse  $m$  und der Eigenfrequenz  $\omega_1$  ist

$$\zeta = \frac{e^2}{m \omega_1^2 - \omega^2 + i\delta}; \quad \delta = \frac{2e^2\omega^3}{3mc^3} \quad (2)$$

und für ein Gas mit mehreren Absorptionsfrequenzen  $\omega_k$  gilt

$$\zeta = \sum_k \frac{e^2}{m} \frac{f_k}{\omega_k^2 - \omega^2} \quad (3)$$

für diejenigen Spektralgebiete, wo keiner der Werte  $\omega_k - \omega$  sehr klein ist.

Für den Atomabsorptionskoeffizienten (d. i. die Fläche, auf die ebensoviel Energie des Lichtes fällt, wie von einem Atom absorbiert wird), gilt

$$\alpha = -\frac{4\pi\omega}{c} \eta. \quad (4)$$

Nimmt man nun zwischen der „Stärke“  $f_k$  eines Oszillators und der Gesamtabsorption der von ihm herrührenden Absorptionslinie

$$\alpha_k = \int_0^\infty \alpha_k(\omega) d\omega$$

die Beziehung

$$f_k = \frac{m c a_k}{2\pi^2 e^2} \quad (5)$$

an, so liegt es nahe, für Gebiete kontinuierlicher Absorption die Formel (3) zu verallgemeinern durch

$$\zeta(\omega) = \frac{c}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{\alpha(\omega') d\omega'}{\omega'^2 - \omega^2}. \quad (6)$$

Unter Verwendung von (2) folgt aus (5) für den klassischen Oszillator  $f_k = 1$ , während dies nach der Quantentheorie nicht mehr gilt.

Das Integral (6) ist stets reell; man wird daher annehmen müssen, daß es nicht sowohl  $\zeta$  selbst, als seinen reellen Teil  $\xi$  darstellt. Nimmt man ferner an:

$$\xi(-\omega) = \xi(\omega); \quad \eta(-\omega) = -\eta(\omega),$$

so folgt aus (6) mit Verwendung von (4)

$$\xi(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y(\omega') d\omega'}{\omega - \omega'}. \quad (7)$$

Dabei bedeutet  $\int$ , daß der Cauchysche Hauptwert

$$\int_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-\infty}^{\omega - \epsilon} + \int_{\omega + \epsilon}^{+\infty} \right)$$

zu nehmen ist, um die Singularität für  $\omega = \omega'$  zu vermeiden.

Die bekannte mathematische Relation (7) läßt die Umkehrung

$$\eta(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi(\omega') d\omega'}{\omega - \omega'}$$

zu und gibt an, daß die Funktion

$$\zeta = \xi(\omega) + i\eta(\omega)$$

des komplexen Argumentes  $\omega$  in der unteren Halbebene regulär ist.

Dies gestattet die Anwendung für einen einfallenden Wellenzug, bei dem gelten möge

$$E = R [f(t) e^{i(a - ib)t}],$$

$$b > 0, \quad f(t) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } t < T \\ 0 & \text{,, } t > T > 0. \end{cases}$$

Nimmt man seine Fourierzerlegung vor und beachtet die Regularität von  $\xi$  in der unteren Halbebene, so folgt für  $t < T$  für die Polarisation

$$P = R [\zeta(a - ib) e^{i(a - ib)t}],$$

d. h. man kann auch für komplexe Werte der Frequenz einen Polarisationskoeffizienten definieren, der endlich bleibt, wenn es sich um Wellen handelt, deren Amplitude mit der Zeit anwächst.

Dasselbe wie von  $\zeta$  gilt von der Regularität des Brechungsindex  $n$ , solange man sich im Gültigkeitsbereich von (1a) befindet; dagegen gilt dies nicht mehr, wenn man die Beziehung (1) der Lorenz-Lorentzschen Formel zugrunde legt.

<sup>1)</sup> Vgl. Atti del Congresso Internazionale dei Fisici, Como. Sett. 1927.