Tentamen Klassieke Elektrodynamica, 25 maart 2011, 14–17 uur.

1. In de elektrostatica is slechts één van de volgende twee elektrische velden toegestaan:

$$\vec{E}_1(\vec{r}) = E_0(y^2\hat{x} + (2xy + z^2)\hat{y} + 2yz\hat{z}),$$
$$\vec{E}_2(\vec{r}) = E_0(xy\hat{x} + 2yz\hat{y} + 3xz\hat{z}).$$

(a) Welk van beide velden is niet toegestaan en waarom niet?

Het toegestane elektrische veld noemen we $\vec{E}$.
(b) Welke ladingsverdeling $\rho(\vec{r})$ produceert dit elektrische veld?

De bijbehorende elektrostatische potentiaal Φ is gegeven door de lijnintegraal

$$\Phi(\vec{r}) = -\int_0^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l},$$

langs een pad van de oorsprong naar het punt $\vec{r}$.
(c) Waarom hangt Φ niet af van de keuze van het pad?
(d) Bereken Φ. Geef in een tekening aan welk pad je gekozen hebt.

2. Het elektrische veld in vacuüm voldoet aan de golfvergelijking

$$\Delta\vec{E}(\vec{r}, t) - \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}(\vec{r}, t) = 0. \tag{1}$$

(a) Leid deze vergelijking af uit de Maxwell vergelijkingen.

Het elektrische veld van een vlakke golf die zich in de x-richting voortplant is onafhankelijk van y en z.
(b) Bewijs dat het een *transversale* golf is, dat wil zeggen, zonder component in de x-richting.

Een oplossing van de golfvergelijking is $\vec{E} = \hat{y}E_0 \sin(kx - \omega t)$, voor constanten E_0, k, ω.
(c) Leid af welke relatie er geldt tussen het golfgetal k en de frequentie ω van de golf.

Het bijbehorende magnetische veld is $\vec{B} = \hat{z}B_0 \sin(kx - \omega t)$.
(d) Bereken de relatie tussen de amplitudes B_0 en E_0.
(e) Bereken de energiestroomdichtheid van deze elektromagnetische golf, *gemiddeld over één periode.*

zie ommezijde

3. Gegeven is de vectorpotentiaal

$$\vec{A} = A_0(x\hat{y} - y\hat{x}),$$

met A_0 een constante.
(a) Bereken het bijbehorende magnetische veld.

Hetzelfde magnetische veld kan ook beschreven worden door een andere vectorpotentiaal $\vec{A}' = 2A_0 x\hat{y}$.
(b) Construeer de ijktransformatie die $\vec{A}$ in $\vec{A}'$ doet overgaan.

4. *(a)* Geef de Liénard-Wiechert formules voor de elektromagnetische potentialen Φ en $\vec{A}$ van een bewegende puntlading en leg uit wat de gebruikte symbolen betekenen. Geef aan waar je in deze formules de effecten van retardatie en schijnlading terugvindt.

Een puntlading q beweegt met constante snelheid v langs de x-as. Op tijdstip t_0 bevindt q zich in het punt $(x_0, 0, 0)$.
(b) Bereken Φ in de oorsprong, door gebruik te maken van de Liénard-Wiechert formules.
(c) Het resultaat voor de elektrische potentiaal Φ hangt niet af van de snelheid v van de lading. Leg uit waarom het elektrische veld $\vec{E}$ daarentegen wèl van v zal afhangen.

antwoorden tentamen KED, 25 maart 2011

1. *(a)* $\nabla \times \vec{E}_2 \neq 0$, dus dit veld is niet toegestaan in de elektrostatica.
   (b) $\rho = \epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = 2E_0\epsilon_0(x + y)$
   (c) de rotatie van $\vec{E}$ is nul, dus de lijnintegraal langs een gesloten pad is nul, dus het verschil van de integraal langs twee paden is nul.
   (d) $\Phi(x, y, z = -\int_0^x E_{2,x}(x', 0, 0)dx' + \int_0^y E_{2,y}(x, y', 0)dy' + \int_0^z E_{2,z}(x, y, z')dz' = -E_0(xy^2 + yz^2)$.

2. *(a)* neem de rotatie van MII en vul MIV in, zoals op het college besproken.
   (b) $\operatorname{div} \vec{E} = \partial E_x/\partial x = 0$, dus E_x is een uniform veld; de golf (die plaatsafhankelijk is) heeft dus geen component in de x-richting.
   (c) invullen in de golfvergelijking geeft $k^2 = \omega^2\epsilon_0\mu_0$.
   (d) MII geeft $kE_0 = \omega B_0$.
   (e) $\vec{j}_u = (1/\mu_0)\vec{E}\times\vec{B} = \hat{x}E_0B_0 \sin^2(kx - \omega t)$; middelen over één periode levert op $\frac{1}{2}E_0B_0/\mu_0$.

3. *(a)* $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} = 2A_0\hat{z}$.
   (b) $\vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad} \chi$, met $\chi = A_0xy$.

4. *(a)* zie college.
   (b) $\Phi = (4\pi\epsilon_0)^{-1}q/x_0$.
   (c) $\vec{E} = -\operatorname{grad}\Phi - \partial\vec{A}/\partial t$ en $\vec{A}$ hangt van v af, dus $\vec{E}$ zal dat ook doen.