Tentamen Klassieke Elektrodynamica, 15 april 2015, 14–17 uur.

1. Veronderstel dat er aanwijzingen gevonden worden voor het bestaan van magnetische monopolen. De divergentie van het magneetveld hoeft dan niet overal gelijk te zijn aan nul: $\mathrm{div}\,\vec{B}(\vec{r},t) = \mu_0 \rho_M(\vec{r},t)$, met ρ_M de monopooldichtheid.
   (a) Bereken het tijdsonafhankelijke magnetische veld $\vec{B}(\vec{r})$ van één enkele magnetische monopool (lading q_m) in de oorsprong.
   (b) Waarom moet de wet van Faraday, $\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$, aangepast worden aan het bestaan van magnetische monopolen?
   (c) De stroomdichtheid $\vec{j}_M$ van de magnetische monopolen voldoet aan de vergelijking

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho_M(\vec{r},t)\,d\vec{r} = -\oint_S \vec{j}_M(\vec{r},t)\cdot d\vec{S},$$

   met V een willekeurig volume en S het oppervlak van dat volume. Waarom noemt men dit een "behoudswet"? (Wat is behouden?) Welke aanpassing van de wet van Faraday is in overeenstemming is met deze behoudswet?

2. Een elektromagnetisch veld *in vacuum* wordt beschreven door de potentialen $\Phi = 0$, $\vec{A} = A_0\hat{y}\sin(kx - \omega t)$.
   (a) Bereken de bijbehorende velden $\vec{E}$ en $\vec{B}$.
   (b) Bereken de relatie tussen het golfgetal k en de frequentie ω.
   (c) Is het mogelijk om een ijktransformatie te vinden zodanig dat de vektorpotentiaal overal gelijk wordt aan nul? Zo neen, waarom niet; Zo ja, wat is dan die transformatie.

3. In een metaal[1] (geleidingsvermogen σ) geldt de wet van Ohm: $\vec{j} = \sigma\vec{E}$.
   (a) Leid af dat de ladingsverdeling $\rho(\vec{r},t)$ in het metaal voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\rho.$$

   Laat zien dat $\rho \to 0$ voor $t \to \infty$.
   (b) We veronderstellen nu $\rho = 0$ in het metaal. Leid af dat het elektrische veld $\vec{E}(\vec{r},t)$ voldoet aan de vergelijking[2]

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial\vec{r}^2} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.$$

ga verder met de opgave op de achterkant

[1]De dielektrische constante en magnetische permeabiliteit in het metaal stellen we gelijk aan die van vacuum, nl. ε_0 en μ_0.
[2]notatie: $\partial^2/\partial\vec{r}^2 \equiv \Delta \equiv$ Laplaciaan.

(c) We zoeken een oplossing in de vorm van een vlakke golf,

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \hat{y}\,\mathrm{Re}\left[E_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}\right].$$

Bereken de dispersierelatie, d.w.z. de relatie tussen het (complexe) golfgetal k en de frequentie ω. Geef aan hoe de indringdiepte van het elektrische veld in het metaal afhangt van σ in het geval dat $\sigma \ll \varepsilon_0\omega$.

4. *(a)* Geef de Liénard-Wiechert potentialen $\Phi(\vec{r},t)$ en $\vec{A}(\vec{r},t)$. Leg uit wat de gebruikte symbolen betekenen. Geef expliciet aan waar de geretardeerde tijd voorkomt in Uw formules. Geef ook de definitie van de geretardeerde tijd.
(b) Een puntlading beweegt met constante snelheid v naar rechts langs de x-as. Op $t = 0$ is de puntlading in de oorsprong. Bereken de potentialen Φ en $\vec{A}$ op de x-as rechts van de lading.
(c) Het resultaat voor de elektrische potentiaal Φ op $t = 0$ hangt niet af van de snelheid v waarmee de puntlading door de oorsprong beweegt. Leg uit waarom het elektrische veld $\vec{E}$ daarentegen wèl van v zal afhangen.

ANTWOORDEN TENTAMEN KED, 15 APRIL 2015

1. *(a)* $\vec{B} = \hat{r} q_M (\mu_0/4\pi) r^{-2}$, met $q_M = \int \rho_M \, d\vec{r}$ de magnetische "lading".
   (b) $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_0 \partial \rho_M / \partial t$ is ongelijk aan nul als ρ_M tijdsafhankelijk is, maar de divergentie van de rotatie van elke vectorveld moet gelijk zijn aan nul, dus er is een tegenstrijdigheid; deze kan opgelost worden door een extra term toe te voegen aan de wet van Faraday: $\operatorname{rot} \vec{E} = -\partial \vec{B}/\partial t - \mu_0 \vec{j}_M$, zodanig dat $\partial \rho_M / \partial t = -\operatorname{div} \vec{j}_M$.
   (c) In differentiële vorm luidt deze vergelijking $\partial \rho_M / \partial t = -\operatorname{div} \vec{j}_M$. Deze volgt uit bovengenoemde aanpassing van de wet van Faraday.

2. *(a)* $\vec{E} = -\nabla \Phi - \partial \vec{A}/\partial t = \omega A_0 \hat{y} \cos(kx - \omega t)$;
   $\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = k A_0 \hat{z} \cos(kx - \omega t)$.
   (b) $\nabla \times \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \partial \vec{E}/\partial t \Rightarrow k^2 = \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2$.
   (c) Neen, want dan zou $\vec{B}$ nul moeten zijn.

3. *(a)* $\partial \rho / \partial t = -\operatorname{div} \vec{j} = -\sigma \operatorname{div} \vec{E} = -(\sigma/\varepsilon_0)\rho$; oplossing: $\rho(t) = \rho(0) \exp(-\sigma t/\varepsilon_0) \to 0$ voor $t \to \infty$.
   (b) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E} = -\operatorname{rot} \partial \vec{B}/\partial t$, dus $\Delta \vec{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \partial^2 \vec{E}/\partial t^2 + \mu_0 \partial \vec{j}/\partial t = \varepsilon_0 \mu_0 \partial^2 \vec{E}/\partial t^2 + \mu_0 \sigma \partial \vec{E}/\partial t$.
   (c) $-k^2 = -\varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 - i \omega \mu_0 \sigma$; indringdiepte is het imaginaire deel van k: $k = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}\, \omega \sqrt{1 + i\sigma/\varepsilon_0 \omega} \approx \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}\, \omega + \frac{1}{2} i \sigma \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ voor $\sigma/\varepsilon_0 \omega \ll 1$.

4. *(a)* zie college.
   (b) $\Phi(\vec{r}, t) = (q/4\pi\varepsilon_0)|x - vt|^{-1}$, $\vec{A}(\vec{r}, t) = (q\mu_0/4\pi)\hat{x} v |x - vt|^{-1}$. De afleiding is behandeld op het college.
   (c) $\vec{E} = -\operatorname{grad} \Phi - \partial \vec{A}/\partial t$ en $\vec{A}$ hangt van v af, dus $\vec{E}$ zal dat ook doen.