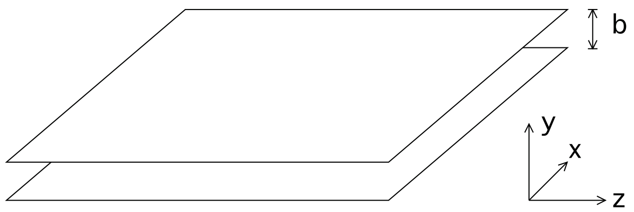
Tentamen Relativistische Elektrodynamica, 22 augustus 2012, 14–17 uur.

1. Beschouw de voortplanting van een elektromagnetische golf tussen twee evenwijdige geleidende platen op $y = 0$ en $y = b$ (zie figuur). Zoek een magnetisch veld van de vorm

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \text{Re}\left\{\hat{x}B(y)e^{i(kz-\omega t)}\right\}$$

(a) Geef de differentiaalvergelijking waar de functie $B(y)$ aan moet voldoen. Waarom kan $\vec{B}$ niet ook van x afhangen?
(b) Beargumenteer waarom $B(y)$ moet voldoen aan de randvoorwaarde $dB/dy = 0$ voor $y = 0$ en $y = b$.
(c) Bepaal de functie $B(y)$. Wat is de dispersierelatie tussen k en ω? Beneden welke frequentie is er geen lopende golf van deze vorm mogelijk?



2. In de relativiteitstheorie geldt de tweede wet van Newton in de vorm

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

maar *niet* in de vorm

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

(a) Leg uit wat het verschil is tussen deze twee vergelijkingen. Waarom verdwijnt dit verschil bij niet-relativistische snelheden?
(b) Stel een deeltje is in rust in inertiaalstelsel S. We beschouwen nu een tweede inertiaalstelsel S', wat ten opzichte van S met snelheid v_R in de x-richting beweegt. Bereken de kracht $\vec{F}'$ op het deeltje in stelsel S', gegeven de kracht $\vec{F}$ in stelsel S.
(c) Toon aan dat de vector $\vec{K} = (1 - |\vec{v}|^2/c^2)^{-1/2}\vec{F}$ uit te breiden is tot een viervector.

zie ommezijde

3. *(a)* Laat zien dat $|\vec{E}|^2 - c^2|\vec{B}|^2$ relativistisch invariant is.
(b) Stel dat het magnetische veld nul is in een bepaald punt in stelsel S. Bestaat er een stelsel S' waarin het elektrische veld nul is in dat punt? Beargumenteer Uw antwoord.
(c) Stel dat het elektrische en magnetische veld loodrecht op elkaar staan in een bepaald punt in stelsel S. Bewijs dat ze dan ook loodrecht op elkaar staan in dat punt in elk ander stelsel S'.

4. *(a)* Hoe transformeren de potentialen $\Phi(\vec{r}, t)$ en $\vec{A}(\vec{r}, t)$ bij verandering van inertiaalstelsel S naar S'?
(b) Gegeven is dat de potentialen in S voldoen aan de Lorentzijk,

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \vec{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

Waarom voldoen de potentialen in S' dan ook aan de Lorentzijk?
(c) In de Lorentzijk gelden in stelsel S de golfvergelijkingen

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial \vec{r}^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j},$$
$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \vec{r}^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho,$$

waarbij $\vec{j}(\vec{r}, t)$ en $\rho(\vec{r}, t)$ de stroom- en ladingsdichtheden zijn. Hoe luiden de golfvergelijkingen in stelsel S'?

antwoorden tentamen RED, 22 augustus 2012

1. *(a)* $\nabla \cdot \vec{B} = \partial B_x/\partial x = 0$, dus B kan niet afhangen van x
het magneetveld voldoet aan de golfvergelijking in vacuum, dus voor $B(y)$ vind je $d^2B/dy^2 = (k^2 - \omega^2/c^2)B$
(b) de randvoorwaarde op het elektrische veld is $E_z = 0$ voor $y = 0$ of $y = b$; omdat $\partial E_z/\partial t = -c^2 \partial B_x/\partial y$ volgt dat de randvoorwaarde voor $B(y)$ gegeven is door $dB/dy = 0$ voor $y = 0$ en $y = b$
(c) $B(y) = B_0 \cos(n\pi y/b)$, $k^2 = (\omega/c)^2 - (n\pi/b)^2$, $\omega_c = \pi c/b$

2. *(a)* $\vec{p} = m d\vec{r}/d\tau$, met eigentijd $\tau = t\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Alleen als $v \ll c$ geldt $\vec{p} = m d\vec{r}/dt$.
(b) $F'_x = F_x$, $F'_y = F_y/\gamma$, $F'_z = F_z/\gamma$, $\gamma = (1 - v_{\mathrm{R}}^2/c^2)^{-1/2}$.
(c) $\vec{K} = d\vec{p}/d\tau$, $K_0 = dp_0/d\tau = c^{-1} dE/dt$.

3. *(a)* Transformatieregels invullen en uitwerken.
(b) Neen, tenzij $\vec{E}$ ook nul is. Immers, als $\vec{B} = 0$ en $\vec{E} \neq 0$, dan geldt dat $|\vec{E}|^2 - c^2|\vec{B}|^2 > 0$. Maar als $\vec{E}' = 0$ moet deze term ≤ 0 zijn, hetgeen een tegenstrijdigheid oplevert.
(c) Gegeven $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$, vul de transformatieregels in, werk uit en vind $\vec{E}' \cdot \vec{B}' = 0$.

4. *(a)* $(\Phi/c, \vec{A})$ transformeert als een viervector, dus net als $(ct, \vec{r})$
(b) de Lorentzijk is het inproduct van twee viervectoren, $(\Phi/c, \vec{A})$ en $(-\partial/\partial ct, \partial/\partial\vec{r})$, en zo'n inproduct is invariant onder Lorentztransformatie
(c) de golfvergelijkingen hebben in elk inertiaalstelsel dezelfde vorm:

$$\frac{\partial^2 \vec{A}'}{\partial \vec{r}'^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}'}{\partial t'^2} = -\mu_0 \vec{j}', \quad \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial \vec{r}'^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi'}{\partial t'^2} = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho'.$$