MATHEMATICA

VOLUMUL VI.
1 9 3 2

C L U J
INSTITUTUL DE ARTE GRAFICE „ARDEALUL", STR. MEMORANDULUI 22
1 9 3 2.

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS HARMONIQUES ET DES FONCTIONS PRÉHARMONIQUES

par

Jean Capoulade
(à Poitiers).

Reçue le 10 Juillet 1931.

I. Dans un récent article du présent recueil, Mr BOULIGAND a indiqué la possibilité de modifier la démonstration du théorème de Mr PICARD : *„une fonction harmonique positive dans tout l'espace est une constante"*. Le but de cet article est de prolonger le procédé indiqué pour établir un résultat analogue relatif aux fonctions préharmoniques.

Au lieu de former, comme dans la méthode de Mr PICARD, la différence $U_P - U_0$ et de montrer par la formule de POISSON écrite pour une sphère de centre 0 et de rayon arbitrairement grand, que cette différence peut être rendue en valeur absolue arbitrairement petite, la méthode de Mr BOULIGAND consiste à former le rapport $\frac{U_P}{U_0}$ dans les mêmes conditions et à prouver qu'il est arbitrairement voisin de l'unité

Quelle que soit la surface, on a :

$$U_P = \frac{1}{4\pi}\iint U_M \frac{\partial G}{\partial n_M}(M, P)\, d\sigma_M$$

que l'on peut écrire :

$$(1) \qquad U_P = \frac{1}{4\pi}\iint U_M \frac{\partial G}{\partial n_M}(M, 0) \times \frac{\frac{\partial G}{\partial n_M}(M, P)}{\frac{\partial G}{\partial n_M}(M, 0)}\, d\sigma_M$$

0 étant un point fixe intérieur.

Si l'on prend une sphère, prenons le centre pour point 0 ; on a :

$$\frac{\frac{\partial G}{\partial n_M}(M, P)}{\frac{\partial G}{\partial n_M}(M, 0)} = \frac{\frac{R^2-\overline{0P}^2}{R.\,\overline{MP}^2}}{\frac{R^2}{R^4}} = \frac{R(R^2-\overline{0P}^2)}{\overline{MP}^3} ;$$

or ce dernier rapport, pour R infiniment grand, tend quel qui soit M, vers 1.

U_M étant essentiellement positif, on a alors pour R_∞:

$$U_P = \frac{1}{4\pi} \iint U_M \frac{\partial G}{\partial n_M} (M, 0)\, d\sigma_M = U_0 .$$

Si l'on part d'une surface quelconque, Mr BOULIGAND suggère l'idée d'utiliser des surfaces homothétiques par rapport au point 0 et de plus en plus grandes. L'expression de G est alors inconnue et par suite aussi celle de $\frac{\partial G}{\partial n}$; néanmoins, il est encore possible de trouver la limite du rapport :

$$(2) \qquad \frac{\dfrac{\partial G}{\partial n_M}(M, P)}{\dfrac{\partial G}{\partial n_M}(M, 0)}$$

en utilisant l'artifice suivant : ramenons par des homothéties successives ($k < 1$) de centre 0, les différentes surfaces à avoir leur image sur une surface fixe. Au cours de ces homothéties P va tendre vers 0 et alors trouver la limite vers laquelle tend le rapport pour des surfaces de plus en plus grandes revient à chercher sur une surface fixe sa limité quand P tend vers 0 ; or sur cette surface $\frac{\partial G}{\partial n}$ est une fonction continue de P aux environs de 0, le rapport va donc tendre vers 1 ; il resterait à prouver l'uniforme continuité.

II. Considérons une fonction préharmonique positive dans tout l'espace. Prenons pour centre 0 un nœud quelconque, considérons une suite de cubes de cotés : 2N, 4N ... 2^nN et soit P un nœud du premier cube.

Faisons une série d'homothéties de centre 0 et de rapport :

$\frac{1}{2}$ donnant l'image du deuxième cube sur le premier

$\frac{1}{4}$ » » » troisième » » » »

$\frac{1}{8}$ » » » quatrième » » » »

. . . .

$\frac{1}{2^n}$ » » » n-ième » » » »

Ceci amène à considérer à l'intérieur du premier cube des mailles de plus en plus petites; de plus, au cours de ces homothéties le point P a des images successives tendant vers le point 0.

Or : quelles que soient les valeurs données à la frontière quand le réseau est très dense, les valeurs trouvées aux différents nœuds, diffèrent très peu des valeurs correspondantes d'une fonction harmonique; pour cette dernière fonction on a vu à la fin du paragraphe I que pour P tendant vers 0 le rapport (2) tendait vers l'unité et qu'on pouvait en conclure l'égalité : $U_P = U_0$; on a donc la même conclusion pour la fonction préharmonique : „*Une fonction préharmonique positive dans tout l'espace est une constante*".

III. La méthode précédente peut être utilisée pour démontrer les résultats suivants :

„*Une fonction préharmonique positive dans un domaine infini ayant la forme ou bien d'un demi-espace, ou bien d'un dièdre droit, ou bien d'un trièdre trirectangle et s'annulant sur la frontière de ce domaine, est déterminée à un facteur constant près*".

Nous ne démontrerons, à titre d'exemple, que la première proposition.

Prenons pour origine un nœud quelconque 0 du plan limitant le domaine où la fonction est définie, plan sur lequel elle est nulle ; considérons une suite de demi-cubes de centre 0 et d'arêtes $2N, 4N \ldots 2^n N$; soient $P(\xi, \eta, \zeta)$ un noeud quelconque du premier cube et $A(1, 1, 1)$ un second nœud.

Si l'on fait comme au paragraphe II une série d'homothéties de centre 0 et de rapport $\frac{1}{2^n}$, on est amené à considérer sur le premier demi-cube un réseau de plus en plus dense et d'autre part les images successives de $P\left(\frac{\xi}{2^n}, \frac{\eta}{2^n}, \frac{\zeta}{2^n}\right)$ et de $A\left(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n}\right)$ tendent vers 0.

On approche alors d'une fonction harmonique définie dans ce demi cube. Pour cette fonction, on a:

$$U_P = \iint U_M \left[\frac{\partial G}{\partial n_M}(M, P) - \frac{\partial G}{\partial n_M}(M, P')\right] d\sigma_M$$

$$U_A = \iint U_M \left[\frac{\partial G}{\partial n_M}(M, A) - \frac{\partial G}{\partial n_M}(M, A')\right] d\sigma_M$$

G représentant la fonction de Green du cube et P' et A' les symétriques de P et A par rapport au planninitial.

Lorsque P tend vers 0, on a :

$$\frac{\partial G}{\partial n_M}(M, P) - \frac{\partial G}{\partial n_M}(M, P') = 2\,\frac{\xi}{2^n}\,\frac{\partial}{\partial \xi}\,\frac{\partial G}{\partial n_M}(M, P)_{\xi=\eta=\zeta=0}$$

Lorsque A tend vers 0, on a :

$$\frac{\partial G}{\partial n_M}(M, A) - \frac{\partial G}{\partial n_M}(M, A') = 2\,\frac{1}{2^n}\,\frac{\partial}{\partial \xi}\,\frac{\partial G}{\partial n_M}(M, A)_{\xi=\eta=\zeta=0}$$

d'où $\dfrac{U_P}{U_A}$ tend vers ξ. La fonction préharmonique aussi voisine que l'on veut de la fonction harmonique possède donc la même propriété.

IV. Les raisonnements des paragraphes II et III reposent sur le voisinage des fonctions harmoniques et préharmoniques dans un domaine pour un réseau très serré ; un lemme d'uniformité serait exigible pour leur donner une complète rigueur. Nous allons donner maintenant une solution plus élémentaire ; afin d'éviter des formules trop compliquées nous nous bornerons uniquement au cas de trois dimensions.

M^r^ Le Roux [1] a donné pour les fonctions préharmoniques dans le cas d'un domaine rectangulaire une formule analogue à celle de Poisson. Cette formule devient dans le cas d'un carré de coté 2^n, le centre du carré étant pris pour origine, la longueur d'une maille prise pour unité :

$$U_P = \sum U_M \,.\; \varphi(M, P)$$

$M(\xi, \eta)$ nœud periphérique, $P(x, y)$ nœud intérieur,

$$(3)\quad \begin{aligned}\varphi(M, P) = {} & \frac{1}{n}\sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{\operatorname{sh} \mu_r \frac{x+\xi}{n}}{\operatorname{sh} 2\mu_r \frac{\xi}{n}} \cos\frac{(2r+1)\pi\eta}{2n} \cos\frac{(2r+1)\pi y}{2n} + \\ & \frac{1}{n}\sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{\operatorname{sh} \mu'_r \frac{x+\xi}{n}}{\operatorname{sh} 2\mu'_r \frac{\xi}{n}} \sin\frac{r\pi\eta}{n} \sin\frac{r\pi y}{n} + \\ & \frac{1}{n}\sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{\operatorname{sh} \mu_r \frac{y+\eta}{n}}{\operatorname{sh} 2\mu_r \frac{\eta}{n}} \cos\frac{(2r+1)\pi\xi}{2n} \cos\frac{(2r+1)\pi x}{2n} + \\ & \frac{1}{n}\sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{\operatorname{sh} \mu'_r \frac{y+\eta}{n}}{\operatorname{sh} 2\mu'_r \frac{\eta}{n}} \sin\frac{r\pi\zeta}{n} \sin\frac{r\pi x}{n}\,.\end{aligned}$$

---

(1) *Journal de Math.* tome X. fasc. III 1914.

avec

$$\mu = 2\pi \log \left(\sqrt{1+\sin^2\frac{\alpha}{2n}} + \sin\frac{\alpha}{2n}\right)$$

et

$$\alpha = \frac{(2r+1)\pi}{2} \quad \text{pour} \quad \mu_r$$

$$\alpha = \quad r\pi \quad \text{pour} \quad \mu'_r .$$

Pour P en 0, on a :

$$\varphi(M, 0) = \frac{1}{n}\sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{\operatorname{sh} \mu_r \frac{\xi}{n}}{\operatorname{sh} 2\mu_r \frac{\xi}{n}} \cos\frac{(2r+1)\pi\eta}{2n} +$$

$$\frac{1}{n}\sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{\operatorname{sh} \mu_r \frac{\eta}{n}}{\operatorname{sh} 2\mu_r \frac{\eta}{n}} \cos\frac{(2r+1)\pi\xi}{2n} .$$

Or :

$$U_P = \sum U_M \,.\, \varphi(M, 0) \cdot \frac{\varphi(M, P)}{\varphi(M, 0)} .$$

Supposons alors $U_M > 0$ dans tout le plan et considérons des carrés de plus en plus grands; l'examen des formules donnant $\varphi(M, P)$ et $\varphi(M, 0)$ montre qu'alors, pour n arbitrairement grand, le rapport $\frac{\varphi(M, P)}{\varphi(M, 0)}$ tend uniformément vers l'unité, d'où :

$$U_P = \sum U_M \,.\, \varphi(M, 0) = U_0 .$$

Supposons maintenant $U_M > 0$ dans le demi plan ($x > 0$) et nulle sur $y'y$.

On a :

$$U_P = \sum U_M \left[\varphi(M, P) - \varphi(M, P')\right]$$

P' symétrique de P par rapport à $y'y$; pour un demi-carré quelconque de coté 2^n et de centre 0, il vient en tenant compte de (3):

$$U_P = U_M \left\{ \frac{1}{n}\sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{\operatorname{sh} \mu_r \frac{x}{n}}{\operatorname{sh} \mu_r \frac{\xi}{n}} \cos\frac{(2r+1)\pi\eta}{2n} \cos\frac{(2r+1)\pi y}{2n} + \right.$$

$$\frac{1}{n}\sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{\operatorname{sh} \mu'_r \frac{x}{n}}{\operatorname{sh} \mu'_r \frac{\xi}{n}} \sin\frac{r\pi\eta}{n} \sin\frac{r\pi y}{n} +$$

$$\left.\frac{1}{n}\sum_{r=0}^{r=n-1}\frac{\operatorname{sh}\mu'_r\frac{(y+\eta)}{n}}{\operatorname{sh}2\mu'_r\frac{\eta}{n}}\sin\frac{r\pi\xi}{n}\sin\frac{r\mu x}{n}\right\}$$

et pour A (1, 1) on aurait une formule analogue : x et y étant remplacés par 1.

Faisons alors tendre n vers l'infini ; il vient :

$$\frac{U_P}{U_A} = \underset{n\to\infty}{\text{limite}}\ \frac{\operatorname{sh}\mu\frac{x}{n}}{\operatorname{sh}\mu\frac{1}{n}} = x\ .$$

On aurait une démonstration analogue pour U préharmonique positive dans l'angle xOy et nulle sur Ox et Oy ; on obtiendrait :

$$\frac{U_P}{U_A} = xy\ .$$