verschiedenen Primidealen

$$\mathfrak{P}^{(\nu)} = (z_1 - \varepsilon_1^{(\nu)}, \ldots, z_r - \varepsilon_r^{(\nu)})$$

mit je nur einer Nullstelle $(\varepsilon_1^{(\nu)}, \ldots, \varepsilon_r^{(\nu)})$. Der Durchschnittsbildung entspricht eine direkte Summenzerlegung (§ 4):

$$\mathfrak{Z}_\Omega = \mathfrak{Z}_1 + \cdots + \mathfrak{Z}_h,$$

wo jeweils $\mathfrak{Z}_\nu \simeq \mathfrak{Z}_\Omega / \mathfrak{P}^{(\nu)}$ wird, also die Darstellung

$$c_1^{\lambda} \ldots c_r^{\lambda_r} \to \varepsilon_1^{(\nu)\lambda_1} \ldots \varepsilon_r^{(\nu)\lambda_r} \quad \text{oder} \quad a \to \chi^{(r)}(a)$$

vermittelt. Diese Darstellungen sind die *Charaktere.* Ihre Anzahl ist $h_1 h_2 \ldots h_r = h$, wie es nach der allgemeinen Theorie sein muß.

§ 23.

Determinante eines hyperkomplexen Systems.

Sei $\mathfrak{o} = a_1 \mathsf{P} + \ldots + a_h \mathsf{P}$ ein hyperkomplexes System. Ich adjungiere zu P h Unbestimmte $x_1, \ldots, x_h$ und bilde

$$\mathfrak{o}^* = a_1 \mathsf{P}(x) + \ldots + a_h \mathsf{P}(x).$$

Die x sollen mit den a_i vertauschbar sein; dadurch sind die Rechnungsregeln in $\mathfrak{o}^*$ schon bestimmt.

In $\mathfrak{o}^*$ liegt „das allgemeine Element von $\mathfrak{o}$"

$$w = a_1 x_1 + \ldots + a_h x_h.$$

Ist in einer Darstellung $a_i \to A_i$, so ist dem w zugeordnet:

$$W = A_1 x_1 + \ldots + A_h x_h.$$

W heißt die zur Darstellung gehörige *Systemmatrix* (oder speziell, wenn die a_i eine Gruppe bilden und $\mathfrak{o}$ daher der Gruppenring ist, die *Gruppenmatrix*). Handelt es sich um die reguläre Darstellung, so hat man die *reguläre Systemmatrix.*

Die Elemente w_{ik} von W sind Linearformen der x. Die „*Systemdeterminante*" $|W|$ ist also vom Grad n, wenn es sich um Darstellungen n-ten Grades handelt. Insbesondere ist die *reguläre Systemdeterminante* vom Grad h.

Die Systemdeterminante ändert sich nicht bei Übergang zu äquivalenten Darstellungen, da $|\mathsf{P} W \mathsf{P}^{-1}| = |\mathsf{P}|\,|W|\,|\mathsf{P}^{-1}| = |W|$.

Bei Übergang von $(a_1, \ldots, a_h)$ zu einer neuen Basis $(b_1, \ldots, b_h)$ und von $w = \sum a_i x_i$ zu $w = \sum b_i y_i$ findet man die neuen Elemente von W und somit auch die neue Determinante, indem man in den alten eine Substitution

$$x_i = \sum \varrho_{ik} y_k$$

mit regulärer Substitutionsmatrix vornimmt.

Liegt eine Kompositionsreihe des Darstellungsmoduls vor, so sieht bei passender Basiswahl die Matrix W so aus:

$$W = \begin{pmatrix} W_1 & & & 0 \\ & W_2 & & \\ & & \ddots & \\ W_{ik} & & & W_r \end{pmatrix},$$

$$|W| = |W_1| \cdot |W_2| \cdot \ldots \cdot |W_r|.$$

Unter den $|W_i|$ einer beliebigen Darstellung kommen keine anderen vor als in der regulären Darstellung von $\mathfrak{o}$ oder sogar von $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$, wo $\mathfrak{c}$ das Radikal ist.

Ist P *algebraisch abgeschlossen, so ist die zu einer irreduziblen Darstellung gehörige Determinante* $|W_i|$ *eine Primfunktion in den* x, *und zu inäquivalenten Darstellungen gehören verschiedene Primfaktoren.*

Beweis. Wir können, da alle irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{o}$ auch Darstellungen von $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$ sind, uns auf den Ring ohne Radikal $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$ beschränken. In ihm führen wir als Basis die Matrizeneinheiten c_{ik} ein; das allgemeine Element lautet dann:

$$w = \sum c_{ik}^{(\nu)} x_{ik}^{(\nu)}.$$

Die Matrizes der irreduziblen Darstellungen lauten: $W_\nu = (x_{ik}^{(\nu)})$. Die Funktionen $|W_\nu| = |x_{ik}^{(\nu)}|$ sind bekanntlich irreduzibel und offenbar voneinander verschieden.

Um die $|W_\nu|$ zu berechnen, kann man die reguläre Systemmatrix von $\mathfrak{o}/\mathfrak{c}$ in ihre Primfaktoren zerlegen. Jeder Primfaktor kommt so oft vor, wie der Grad der irreduziblen Darstellung angibt, da das entsprechende Ideal $\mathfrak{l}_\nu$ so oft in der Kompositionsreihe vorkommt.

Man kann auch die reguläre Systemmatrix von $\mathfrak{o}$ zugrunde legen, erhält dann aber jeden irreduziblen Faktor öfter, nämlich so oft, wie das entsprechende $\mathfrak{l}_\nu$ als Kompositionsfaktor bei den Linksidealen vorkommt. Bei dieser regulären Darstellung war $\mathfrak{o}$ als Linksideal gedacht; faßt man $\mathfrak{o}$ als Rechtsideal auf, so kommt eine zweite reguläre Systemmatrix (die „antistrophe Matrix“ bei Frobenius), welche dieselben irreduziblen Faktoren enthält (nämlich die Systemdeterminanten sämtlicher irreduzibler Darstellungen), aber möglicherweise mit anderen Exponenten (siehe das Beispiel in § 10).

Die Systemdeterminante eines kommutativen Systems zerfällt in Linearfaktoren, da alle irreduziblen Darstellungen vom ersten Grad sind. Diese Linearfaktoren sind selbst die irreduziblen Darstellungen, ergeben also bei Abelschen Gruppen die Charaktere. Diese Tatsache war Dedekinds Ausgangspunkt bei der Untersuchung der Gruppendeterminante nichtabelscher Gruppen.