

Quantumrekenen met Majoranadeeltjes

In het onlangs geopende Quantum Computer Laboratorium (QC-lab) in Delft zullen Majoranadeeltjes worden ingezet om quantumberekeningen te beschermen tegen de versturende invloeden van de omgeving. Deze deeltjes, die materie en antimaterie verenigen, zijn in 2012 opgedoken in supergeleidende schakelingen. Hun beschermende invloed wordt topologisch genoemd en toegeschreven aan niet-Abelse statistiek. Ik zal proberen deze wiskundige begrippen wat te verduidelijken en ons ontwerpen van een quantumrekenmodule voor Majoranadeeltjes. Carlo Beenakker

Kracht en kwetsbaarheid

Quantumrekenen onderscheidt zich op twee essentiële punten van klassiek rekenen. Ten eerste kunnen de rekeneenheden verschillende waarden tegelijkertijd aannemen; in plaats van een bit die 0 óf 1 is, hebben we een qubit die 0 én 1 is. We noteren dit als $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$. Voor een klassieke bit is een van de beide coëfficiënten α en β altijd gelijk aan nul, dus dan heb je óf $|0\rangle$ óf $|1\rangle$, en kun je de haakjes net zo goed weglaten. Voor een qubit zijn beide coëfficiënten ongelijk aan nul, we zeggen dat er een superpositie is van toestand $|0\rangle$ met gewicht $|\alpha|^2$ en toestand $|1\rangle$ met gewicht $|\beta|^2$. Ten tweede zijn de bewerkingen bij

quantumrekenen altijd omkeerbaar. Klassiek rekenen is niet omkeerbaar: als je alleen de som kent kun je de getallen die je hebt opgeteld niet meer reconstrueren. Qubits kun je niet zonder meer optellen, de enige toegestane bewerking is de vermenigvuldiging van de vector (α, β) met een inverteerbare matrix (een zogenaamde unitaire operatie). Het optellen van qubits zal dan altijd samengaan met het aftrekken, en als je som en verschil kent kun je de bewerking natuurlijk wel degelijk omkeren.

Unitaire operaties op qubits zijn zowel bijzonder krachtig als buitengewoon kwetsbaar. Ze zijn krachtig omdat een enkele operatie op N qubits een superpositie van een exponentieel groot aantal (namelijk 2^N) toestanden oplevert. Ze zijn kwetsbaar omdat ze omkeerbaar zijn, invloeden van buitenaf kunnen de bewerking makkelijk verstoren.

Een quantumcomputer moet dus beschermd worden. De voor de hand liggende aanpak is volledige afzondering van de buitenwereld. Voor korte tijd is dit mogelijk, bij zeer lage temperaturen. Een alternatief voor afzondering is verhulling, de informatie is verstopt in een eigenschap van het systeem

die de buitenwereld niet kan uitlezen. In een abstracte beschrijving gaat het om een topologische eigenschap van de golffunctie van het systeem en daarom spreekt men van topologische bescherming van de verholde informatie.

Bij de Majoranadeeltjes wordt dit allemaal wat concreter.

Deeltje en antideeltje

Het onderscheid tussen materie en antimaterie speelt een belangrijke rol in de fysica van elementaire deeltjes: het elektron heeft als antideeltje het positron en deze twee tegengesteld geladen deeltjes zullen elkaar bij een botsing vernietigen (annihileren). Een Majoranadeeltje is zijn eigen antideeltje. Wellicht heeft het neutrino deze eigenschap, maar ook al zou het Majoranadeeltje niet bestaan als elementair deeltje, in supergeleidende metalen komt het voor als een samengesteld deeltje.

Figuur 1 legt dit uit, aan de hand van de Fermi-zee – de gevulde toestanden in de geleidingsband van een metaal. Een elektron bij positieve energie (gepulde toestand boven de ‘zeespiegel’ bij energie nul) heeft als antideeltje een gat bij negatieve energie. Het elektron annihileert het gat door de lege

230

Carlo Beenakker is als hoogleraar verbonden aan het Instituut-Lorentz voor theoretische natuurkunde van de Universiteit Leiden. Samen met Leo Kouwenhoven en Lieven Vandersypen van de TU Delft ontving hij vorig jaar een Europese Synergy-subsidie voor het QC-lab.



beenakker@lorentz.leidenuniv.nl

toestand op te vullen. Om hier een Majoranadeeltje van te maken moet het metaal supergeleidend worden. Dan is het mogelijk om een deeltje samen te stellen uit een elektron en een gat, en precies bij energie nul te binden aan een defect in de supergeleider (zoals het uiteinde van een draad of een magnetische wervel).

We spreken gemakshalve van Majoranadeeltje, maar het is eigenlijk slechts een half deeltje, enigszins zoals een glas dat tegelijk halfvol is en halfleeg. Omdat het totaal aantal elektronen heeltalig is, zal er altijd een even aantal Majoranadeeltjes aanwezig zijn. Zodra je twee Majoranadeeltjes bij elkaar brengt, kunnen ze annihilieren, een onverstoord Fermi-zee achterlatend. Er is een tweede mogelijkheid, een fusie van de beide halfdeeltjes kan een heel deeltje opleveren. Het is alsof het verenigen van twee halfvolle glazen resulteert in een leeg glas of een vol glas.

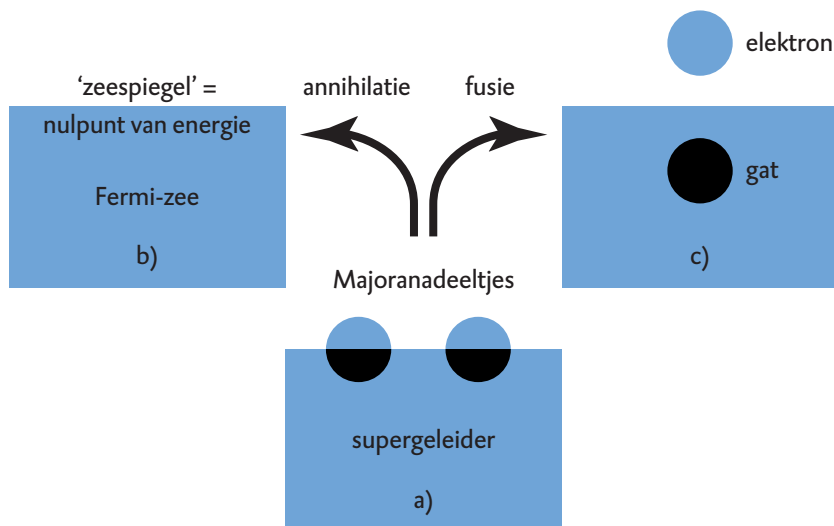
Om informatie in de Majoranadeeltjes op te slaan, definiëren we de toestand $|1\rangle$ of $|0\rangle$ afhankelijk van of er wel of geen deeltje overblijft als ze samengaan. Deze informatie is verhuuld zolang de Majoranadeeltjes uit elkaars buurt blijven. Aan een enkel Majoranadeeltje kun je op geen enkele manier zien wat het samengaan met diens partner zal opleveren. Pas als je ze bij elkaar brengt kun je de toestand van deze qubit uitlezen. Ook voor de omgeving blijft de informatie verhuuld, en dus beschermd. Dit is wat men topologische bescherming noemt.

Er is een gevaar in zicht: vrije elektronen die de supergeleider in- of uitgaan zullen de informatie verstoren, omdat een $|0\rangle$ dan een $|1\rangle$ kan worden of omgekeerd. Er is gelukkig heel veel ervaring in de supergeleidende technologie om uitwisseling van elektronen met de omgeving te minimaliseren, zodat de bescherming intact blijft.

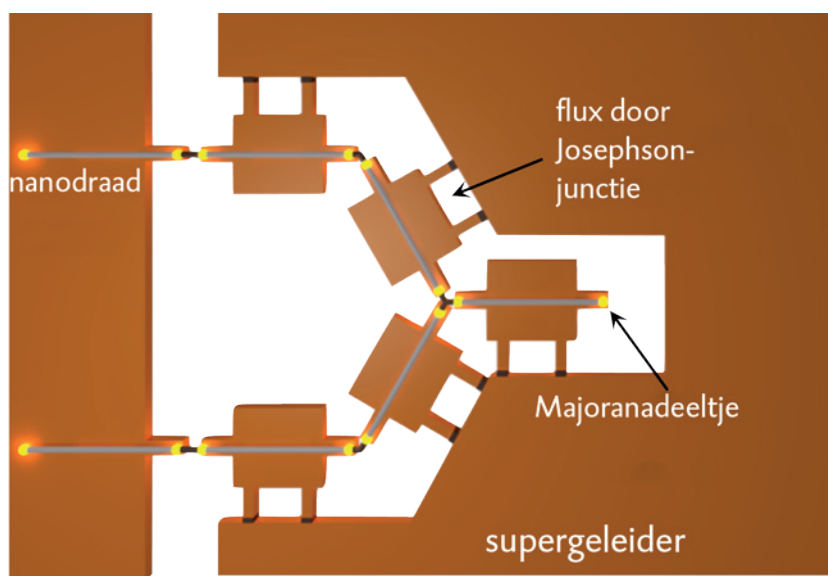
Vlechten

Beschermde opslag van informatie door verhulling is nuttig, maar je wilt wel met die informatie kunnen rekenen – liefst zonder de verhulling op te heffen. Dit is mogelijk omdat Majoranadeeltjes die om elkaar heen bewegen een elektron uitwisselen, ook als ze voortdurend op grote afstand van elkaar blijven.

Stel je begint met twee paar Majoranadeeltjes in een supergeleider waar het



Figuur 1 a) Schematische weergave van een tweetal Majoranadeeltjes in de Fermi-zee van een supergeleider. Samengaan van twee Majoranadeeltjes levert of b) een onverstoord Fermi-zee op, of c) een superpositie van een elektron en een gat. In het eerste geval (annihilatie) zijn alle elektronen in de Fermi-zee twee aan twee verbonden als supergeleidende Cooperparen. In het tweede geval (fusie) blijft er een enkel ongepaard elektron over.



Figuur 2 Schema van een quantumrekenmodule gebaseerd op Majoranadeeltjes. De nanodraad verbindt kleine supergeleidende eilanden, die elk door een Josephsonjunctie met een veel grotere supergeleider verbonden zijn. Ieder eiland bevat twee Majoranadeeltjes in de toestand $|0\rangle$ of $|1\rangle$, afhankelijk van of het aantal elektronen op het eiland even of oneven is. Door de magnetische flux in de Josephsonjuncties te variëren, kunnen elektronen tussen de eilanden worden uitgewisseld. Zo wordt de $\sqrt{\text{NOT}}$ operatie op de qubits uitgevoerd, zonder dat de Majoranadeeltjes verplaatst hoeven te worden.

totaal aantal elektronen oneven is. Als het eerste paar in de toestand $|0\rangle$ is, dan is het tweede paar noodzakelijkerwijs in de toestand $|1\rangle$. Het omgekeerde is ook mogelijk, dus de gecombineerde toestand kunnen we schrijven als de superpositie $\Psi = \alpha|0\rangle|1\rangle + \beta|1\rangle|0\rangle$. Nu verwisselen we een Majoranadeeltje uit het eerste paar met een Majoranadeeltje uit het tweede paar. Het resultaat is een unitaire operatie op de toestand Ψ , waarbij de vector (α, β) vermenigvuldigd wordt met een

$$\text{matrix } U. \text{ Deze wordt gegeven door } U = \sqrt{\frac{1}{2i}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow U^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

dus twee keer verwisselen van de Majoranadeeltjes verwisselt de coëfficiënten α en β – in fysische termen komt dat neer op het uitwisselen van een elektron tussen het eerste en het tweede paar Majoranadeeltjes. De operatie U uit vergelijking (1) wordt aangeduid als $\sqrt{\text{NOT}}$, omdat het kwadraat ervan de NOT-operatie ($0 \leftrightarrow 1$)

uitvoert.

Bij het vermenigvuldigen van matrices doet de volgorde er toe, UV is niet hetzelfde als VU . Bewerkingen waar de volgorde niet uitmaakt heten in de wiskunde Abelse bewerkingen, en het verwisselen van deeltjes heet een statistische bewerking, vandaar dat men spreekt van de niet-Abelse statistiek van Majoranadeeltjes. Het verwisselen van de Majoranadeeltjes wordt wel vergeleken met het vlechten (Engels: *braiding*) van strengen, hetgeen ook een bewerking is waar de volgorde er toe doet.

Vooruitzicht

De $\sqrt{\text{NOT}}$ uitvoeren door twee Majoranadeeltjes om elkaar te laten bewegen voldoet als gedachtenexperiment, maar is niet echt praktisch omdat ze vastzitten aan de uiteinden van een draad. Er zijn wel methodes bedacht om de deeltjes langs de draad te laten

bewegen en dan bij een kruising van twee draden elkaar te laten passeren, maar het liefst zou je de deeltjes veilig op hun plaats willen laten.

Figuur 2 toont een alternatief, waarbij je de $\sqrt{\text{NOT}}$ bewerking kunt uitvoeren zonder de Majoranadeeltjes zelf te verplaatsen. De operatie komt tot stand met behulp van een Josephson-junctie, een welbekende supergeleidende schakelaar die bediend wordt door de magnetische flux in de junctie te variëren. De draad met Majoranadeeltjes blijft gedurende de gehele operatie onaangeroerd.

Een experiment dat een topologisch beschermde operatie realiseert zou een mijlpaal zijn in de ontwikkeling van de quantumcomputer. Wat zou het een triomf zijn als het QC-lab als eerste over de finish zou komen!

Dankwoord

Aan het Leidse ontwerp voor een Ma-

joranaquantumrekenmodule hebben bijgedragen: Anton Akhmerov, Michele Burrello, Cosma Fulga, Fabian Hassler, Bernard van Heck en Timo Hyart, zie arXiv:1111.6001 en arXiv:1303.4379. Het onderzoek wordt vanuit Nederland gesteund door OCW/NWO/FOM en in Europees verband door de ERC.

Referenties

- 1 A. Stern en N. H. Lindner, *Topological quantum computation – From basic concepts to first experiments*, *Science* **339** (2013) 1179.
- 2 G. P. Collins, *Computing with quantum nuts*, *Scientific American*, april 2006.
- 3 M. Leijnse en K. Flensberg, *Introduction to topological superconductivity and Majorana fermions*, *Semiconductor Science and Technology* **27** (2012) 124003 [arXiv:1206.1736].
- 4 C.W. J. Beenakker, *Search for Majorana fermions in superconductors*, *Annual Review of Condensed Matter Physics* **4** (2013) 113 [arXiv:1112.1950].

Groepsportret



Detectie van één enkel foton

Single Quantum in Delft

Single Quantum is een jong bedrijf dat detectoren maakt voor enkele fotonen. Sander Dorenbos is medeoprichter en leidt het onderzoek en de ontwikkeling binnen het bedrijf. We praten met hem en enkele medewerkers over het onderzoek dat ze doen en de producten die ze maken. Esger Brunner en Marieke de Boer

Sander Dorenbos studeerde en promoveerde aan de Technische Universiteit Delft. Tijdens zijn promotie richtte hij zich op het ontwikkelen van detectoren voor enkele fotonen met behulp van supergelei-

dende nanodraden. Dorenbos: “Dat ging best goed en al tijdens mijn promotie vroegen mensen of we die apparaten ook verkopen.” Dat was niet het geval, maar andere vakgroepen konden wel de detector in bruikleen

krijgen in ruil voor een mede-auteurschap op hun wetenschappelijke artikelen. Eind 2011 kwam er nog meer interesse en werd Dorenbos gevraagd een detector te bouwen. “Ik was aan het eind van mijn promotie, dus dat