

# Kosmisch helium en neutrino's

Sjoerd Hardeman, Reinout NederLof, Anne Lisa Wolf

Begeleiders: Leo van der Horn en Jan Smit

Universiteit van Amsterdam

10 juni 2002

## Samenvatting

In dit verslag bekijken we de invloed van het aantal neutrino-soorten op de primordiale heliumvorming. Hiervoor zullen we de fysica van het vroege heelal gaan bekijken, en dan met name de invloed van neutrino's daarop. Het blijkt dat geldt: hoe meer soorten neutrino's, hoe meer helium.

Verder hebben een massalimiet voor neutrino's bepaald, op grond van de aanwezigheid van een neutrino-achtergrond. De massalimiet ( $13 \text{ eV}/c^2$ ) blijkt stringenter te zijn dan wat tot nog toe in deeltjesversnellers bepaald is.

# Inhoudsopgave

<b>1</b>	<b>Inleiding</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Stralingsgedomineerd heelal</b>	<b>5</b>
2.1	De Friedmann-vergelijking . . . . .	5
2.2	De energiewet . . . . .	7
2.3	De Hubble-tijd . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Het vroege heelal</b>	<b>11</b>
3.1	Dichtheid van een stralingsgedomineerd heelal . . . . .	11
3.2	Chemische potentiaal . . . . .	12
3.3	Bepaling van de stralingsdichtheid . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Reacties in het vroege heelal</b>	<b>15</b>
4.1	De begrippen ontkoppeling en uitvriezen . . . . .	15
4.2	De reactiesnelheid $\Gamma$ . . . . .	16
4.3	De neutron-proton verhouding . . . . .	17
4.4	Het neutronverval . . . . .	19
4.5	Kosmisch helium en het aantal neutrino-soorten . . . . .	19
<b>5</b>	<b>Achtergrondstraling</b>	<b>21</b>
5.1	Temperatuursverschil van de achtergronden . . . . .	21
5.2	Neutrino's en donkere materie . . . . .	24
<b>6</b>	<b>Conclusie en discussie</b>	<b>26</b>
<b>A</b>	<b>Distributiefunctie en dichtheid</b>	<b>27</b>
<b>B</b>	<b>Het programma</b>	<b>29</b>

# Hoofdstuk 1

## Inleiding

In dit verslag gaan we kijken hoe het vroege heelal reageert op verschillende aantallen neutrino's, en wat de nu nog zichtbare gevolgen hiervan zijn. Het blijkt dat de heliumproductie van vlak na de oerknal afhankelijk is van het aantal neutrino's. Wij zullen kijken hoe deze relatie verloopt. Hiervoor moeten we kijken naar de fysica van het heelal tot ongeveer 1000 seconden na de oerknal.

Hiertoe zullen we eerst kijken naar de expansie van het vroege heelal. We zullen kijken welke factoren de expansie beïnvloeden, en wat voor een effect dat heeft op de ontwikkeling van het heelal. Eerst zullen we kijken naar de algemene vergelijking voor de expansie van het heelal, later zullen we dit meer gaan toespitsen op het heelal in de fase waarin wij het bekijken.

Vervolgens gaan we kijken naar de fysica van straling. Uit de statistische fysica is een relatie af te leiden die aangeeft hoe straling reageert op een uitdijend heelal. Hiermee kunnen wij dan de expansie van het heelal en het gedrag van straling rechtstreeks aan elkaar koppelen.

In het derde hoofdstuk zullen we kijken naar reacties in het vroege heelal, met name naar het uitsterven van reacties door de uitdijning van het heelal. Ook zullen we hier in iets meer detail ingaan op het proces van heliumvorming. Voor een goed resultaat moet je eigenlijk een reactienetwerk opzetten en het proces met een computer simuleren, maar dat gaat dit project te boven.

Tot slot zullen we kijken naar de effecten van neutrino's op het huidige heelal. In hoofdstuk drie wordt duidelijk dat er ook een neutrino-achtergrond moet zijn. Er zijn aanwijzingen dat neutrino's massa moeten hebben. Daarom hebben we de massalimiet van deze achtergrond uitgerekend. Dit geeft een massalimiet voor neutrino's, op grond van een eenvoudige beschouwing.

NB. Wij hanteren een iets andere letterconventie dan bijvoorbeeld "An introduction to Modern cosmology" van Andrew Liddle. Voor de schaalfactor gebruiken wij de hoofdletter  $R$  (in tegenstelling tot de kleine letter  $a$ ). Verder zal bij ons het subscript  $_0$  niet slaan op het huidige heelal, maar op een ijkstip in het heelal in de door ons bekeken tijdsschaal.

# Hoofdstuk 2

## Stralingsgedomineerd heelal

### 2.1 De Friedmann-vergelijking

Een belangrijke vergelijking in de kosmologie is de Friedmann-vergelijking. Deze beschrijft namelijk de werking van de zwaartekracht, en daarmee de verandering in de tijd, van het heelal. Deze vergelijking wordt in het algemeen uit de algemene relativiteitstheorie afgeleid, maar kan ook gevonden worden met Newtoniaanse natuurkunde<sup>1</sup>. Hiertoe beschouwen we een klein massa-elementje ( $m$ ) op de rand van een willekeurige, met het heelal mee-expanderende bol met straal  $r$  en massa  $M$ . Omdat de massa in het heelal homogeen verdeeld is, geeft alleen de materie binnen de bol een netto-bijdrage aan de potentiële energie (de bijdragen buiten de bol heffen elkaar op). De totale (klassieke) energie van het deeltje wordt dan de som van de kinetische en de potentiële energie:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} \quad (2.1)$$

In deze vergelijking staat  $v$  ( $\equiv \dot{r}$ ) voor de snelheid van het elementje ten opzichte van het middelpunt van de beschouwde bol en is  $G$  de gravitatieconstante van Newton. De hier berekende energie is natuurlijk een behouden grootte. In een coördinatensysteem van met de expansie meebewegende coördinaten kunnen de bewegende coördinaten  $r(t)$  omgeschreven worden naar stilstaande coördinaten  $r_0$  volgens de formule

$$r(t) = r_0 \frac{R(t)}{R_0}$$

---

<sup>1</sup>Dit is geen nette afleiding, maar een manier om de Friedmann-vergelijking aannemelijk te maken. Een relativistische afleiding staat bijvoorbeeld in [1]

Hierin is  $R(t)$  de schalingsfactor en  $R_0$  de waarde van deze factor op een zeker tijdstip  $t = t_0$  (N.B.: Het subscript  $_0$  wordt meestal gebruikt om het huidige heelal mee aan te duiden, maar omdat het hier gaat om het stralingsgedomineerde<sup>2</sup> heelal is dat hier geen handig referentiepunt. Dit subscript staat hier (en verder in deze tekst) voor een zeker vergelijkingstijdstip in het stralingsgedomineerde heelal). In het  $r_0$ -stelsel staan de objecten, die bewegen met de uitdijning van het heelal, stil.

Het heelal is homogeen en heeft dus een constante dichtheid ( $\rho$ ). Voor de massa ( $M$ ) van de beschouwde bol geldt daarom dat

$$M = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

De Hubble-snelheid is per definitie:

$$H \equiv \frac{\dot{R}}{R}$$

(dus  $v^2 = \dot{r}^2 = H^2 r^2$ ). Invullen hiervan in (2.1) geeft

$$H^2 r_0^2 \frac{R(t)^2}{R_0^2} - \frac{8\pi G r_0^2 R(t)^2}{3R_0} \rho(t) = \frac{2E}{m} \equiv C(E) \quad (2.2)$$

De dichtheid  $\rho$  in deze vergelijking is tijdsafhankelijk, omdat het heelal expandeert en de materie zich dus over een steeds grotere ruimte verspreidt. Omdat de energie behouden is, is  $C(E)$  een constante. Deze vergelijking kan ook geschreven worden als:

$$H^2 - \frac{8\pi G}{3} \rho(R) = \frac{C(E) R_0^2}{r_0^2 R(t)^2}$$

We definiëren:

$$-k \equiv \frac{C(E) R_0^2}{r_0}$$

Uit de energie volgt dus een constante  $k$ . Deze staat voor de kromming van het heelal. Er is aan af te lezen hoe het heelal zich verder ontwikkelt. Als de kinetische energie groter is dan de potentiële energie, is de potentiële energie niet groot genoeg om de uitdijning van het heelal af te remmen. In dit geval is de totale energie groter dan nul en daarom  $k < 0$ . Een negatieve  $k$  betekent dus dat het heelal uit blijft dijen (een negatief gekromd of open heelal). Een even grote potentiële als kinetische energie, oftewel  $E = 0$ , leidt ertoe dat de expansie uiteindelijk (als  $t \rightarrow \infty$ ) helemaal wordt afgeremd. Er

---

<sup>2</sup>Zie §2.3

geldt dan  $k = 0$ . In dit geval blijft het heelal dus wel uitdijen, maar gebeurt dit steeds langzamer (een vlak heelal). De derde mogelijkheid is dat de totale potentiële energie groter is dan de totale kinetische energie. De expansie wordt in dit geval dus niet alleen gestopt, maar het heelal stort uiteindelijk zelfs ineen. In dit positief gekromde (of gesloten) heelal geldt  $k > 0$ .

Met de constante  $k$  volgt dan de Friedmann-vergelijking:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(R) - \frac{k}{R(t)^2} \quad (2.3)$$

Hierbij dient echter wel opgemerkt te worden dat  $\rho$  in de Friedmann-vergelijking staat voor een energie-, en dus niet alleen voor een massadichtheid. Klassiek gezien is deze overgang niet te verklaren. Zoals al eerder vermeld is, wordt de Friedmann-vergelijking echter in het algemeen uit de relativiteitstheorie afgeleid, waarbinnen massa en energie equivalent zijn.

Daarnaast wordt aan deze vergelijking vaak nog een extra term  $\frac{\Lambda}{3}$  toegevoegd voor een bijdrage van de energie van de ruimte zelf. Volgens de quantummechanica kan de lege ruimte namelijk energie hebben en als (2.3) uit de relativiteitstheorie wordt afgeleid, is zo'n term wiskundig ook mogelijk. De term  $\frac{\Lambda}{3}$  is constant en wordt daarom bij grotere  $R$  steeds bepalender voor  $H$ . Voor kleine  $R$  zijn echter de twee reeds in (2.3) genoemde termen dominant. Omdat we het vroege, stralingsgedomineerde heelal beschouwen, stellen we hier  $\Lambda = 0$ .

## 2.2 De energiewet

Om de Friedmann-vergelijking op te lossen is een uitdrukking nodig die de energiedichtheid  $\rho(R)$  geeft. Zo'n uitdrukking kan worden afgeleid uit de energiewet

$$dE + PdV = TdS \quad (2.4)$$

In deze formule staat  $P$  voor de druk,  $V$  voor een met het heelal mee-expanderend volume (met straal  $R$ ),  $T$  voor de temperatuur en  $E$  voor de bijbehorende interne energie van de deeltjes in het volume  $V$ . Omdat het volume met het heelal meeschaalt, is er geen sprake van uitwisseling van warmte met de omgeving (de expansie is adiabatisch). Er geldt dus dat de verandering van de entropie  $dS = 0$ .

De energie per volume-eenheid, oftewel energiedichtheid, is gegeven door

$$\epsilon = \rho c^2$$



De totale energie in een mee-expanderend volume  $V$  is dus

$$E = \epsilon V = \rho c^2 \frac{4\pi}{3} R^3$$

De tijdsafgeleide hiervan is

$$\frac{dE}{dt} = 4\pi R^2 \rho c^2 \frac{dR}{dt} + \frac{4\pi}{3} R^3 \frac{d\rho}{dt} c^2$$

De tijdsafgeleide van het volume is

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi R^2 \frac{dR}{dt}$$

Uit (2.4) volgt dus

$$4\pi R^2 \rho c^2 \dot{R} + \frac{4\pi}{3} R^3 \dot{\rho} c^2 + 4\pi R^2 \dot{R} P = 0$$

Dit is om te schrijven naar

$$3\rho \frac{\dot{R}}{R} + \dot{\rho} + 3P \frac{\dot{R}}{R} \frac{1}{c^2} = 0$$

Hieruit volgt onmiddellijk

$$\dot{\rho} + 3 \frac{\dot{R}}{R} \left( \rho + \frac{P}{c^2} \right) = 0 \quad (2.5)$$

## 2.3 De Hubble-tijd

De snelheid van deeltjes in het heelal is temperatuurafhankelijk. In het vroege, zeer hete heelal hadden de meeste deeltjes daarom relativistische snelheden. De energiedichtheid (en daarmee de ontwikkeling van dit vroege heelal) wordt daarom ook vooral bepaald door deze relativistische deeltjes en fotonen (de energiedichtheid van relativistische deeltjes en fotonen is vergelijkbaar). Om die reden wordt het heelal in deze fase stralingsgedomineerd genoemd. Er geldt<sup>3</sup>:

$$P = \frac{\rho c^2}{3}$$

Het huidige heelal is veel kouder. De energie-dichtheid wordt daarom nu gedomineerd door niet-relativistische deeltjes. Niet meer de snelheid (kinetische energie) is het meest bepalend voor  $\rho$ , maar de energie die in de vorm

<sup>3</sup>Wij zullen hier geen afleiding geven, maar deze is bijvoorbeeld te vinden in [2]

van massa aanwezig is. Het huidige heelal wordt daarom massagedomineerd genoemd. Hier beschouwen we echter alleen het stralingsgedomineerde heelal (nadat neutronen en protonen zich hebben kunnen vormen). Dan geldt de volgende vergelijking:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{R}}{R}\rho = 0$$

Er geldt dus

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -4\frac{\dot{R}}{R}$$

Anders gezegd

$$\frac{d \ln \rho}{dt} = -4 \frac{d \ln R}{dt}$$

Oftewel

$$\ln \frac{\rho}{\rho_0} = \ln \left( \frac{R}{R_0} \right)^{-4}$$

En dus

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left( \frac{R_0}{R} \right)^4 \quad (2.6)$$

Voor het heelal dat door straling gedomineerd werd, geldt kortom:

$$\rho \propto R^{-4}$$

Bij voldoende kleine  $R$  (dus in het vroege, stralingsgedomineerde heelal waar  $\rho \propto R^{-4}$ , zoals uit (2.6) volgt) geldt:

$$\frac{8\pi G\rho}{3} \gg \frac{k}{R^2}$$

Daarom zullen we vanaf hier stellen dat  $k = 0$ . De Friedmann-vergelijking (2.3) wordt dan:

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 \left( \frac{R_0}{R} \right)^4$$

Uit deze vergelijking volgt dat

$$\frac{dR}{dt} \propto R^{-1}$$

Oftewel

$$d\left(\frac{1}{2}R^2\right) \propto dt$$

En dus

$$2t \propto R^2$$

Hieruit volgt

$$R = \sqrt{Ct} \quad \text{en} \quad \dot{R} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C}{t}}$$

met  $C$  een willekeurige constante. Dit geeft een maat  $t$  voor de leeftijd van het stralingsgedomineerde heelal, ook wel de Hubble-tijd genoemd, namelijk:

$$2t = H^{-1} \quad \text{oftewel} \quad t = \frac{1}{2} H^{-1} \quad (2.7)$$

# Hoofdstuk 3

## Het vroege heelal

### 3.1 Dichtheid van een stralingsgedomineerd heelal

Voor de dichtheid van het heelal in de voor ons interessante evolutiefase geldt:

$$\rho = \rho_B + \rho_{e^\pm} + \sum_{\text{soorten}} \rho_{\nu\bar{\nu}} + \rho_\gamma \quad (3.1)$$

Hierin zijn alle deeltjes relativistisch, behalve de baryonen. De baryondichtheid wordt dan gegeven door de niet-relativistische formule  $NkT + Nm_Bc^2$ . Het blijkt dat je deze dichtheid kan verwaarlozen. Daarom praten we over een stralingsgedomineerd heelal; de baryonen zijn in deze fase niet langer relativistisch. Zoals we later zullen zien, is de dichtheid van straling veel gevoeliger voor de temperatuur. Straling voldoet namelijk aan de evenredigheid

$$\rho_{rad} \propto T^4$$

Anderzijds was de baryondichtheid ten tijde van het stralingsgedomineerde heelal zeer laag ten opzichte van de fotondichtheid (dat is ook nu nog het geval, maar nu domineren de baryonen wel). Er zijn ongeveer  $10^9$  fotonen per baryon. Dit had als gevolg dat toen ook de massa-component van baryonen te verwaarlozen was.

De bijdrage van één soort relativistische deeltjes aan de dichtheid van een stralingsgedomineerd heelal volgt uit de verdelingsfunctie. Voor één soort deeltjes hebben we:

$$\rho = g \int f_{eq} E d^3p \quad (3.2)$$

Hierin is  $g$  het aantal vrijheidsgraden per impulsrichting en  $f_{eq}$  de verdelings-

functie van Bose-Einstein of Fermi-Dirac:

$$f_{eq} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/(kT)} \pm 1} \quad (3.3)$$

Voor de Bose-Einsteinverdeling gebruik je het minteken, voor Fermi-Dirac het plusteken.

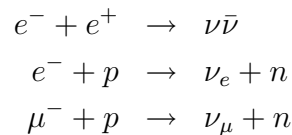
In deze vergelijking komt de chemische potentiaal  $\mu$  voor. Eerst zullen we dus moeten nagaan wat we voor de chemische potentiaal mogen invullen, voordat we verder kunnen gaan.

## 3.2 Chemische potentiaal

Om statistische mechanica in het vroege heelal te kunnen bedrijven, zullen we moeten nagaan welke waarden de chemische potentiaal van de verschillende deeltjes kan aannemen. In het voor ons relevante heelal zijn dit fotonen, neutrino's en elektronen/positronen. De chemische potentiaal van al deze deeltjes wordt algemeen op nul gesteld, wat betekent dat het geen of weinig energie kost om deeltjes toe te voegen aan het systeem.

Dat fotonen een chemische potentiaal nul hebben, is vrij gemakkelijk in te zien. Ze worden in willekeurige aantallen bij allerlei reacties gevormd, en eigenlijk is de enige mogelijkheid dan, dat het geen energie kost om een foton aan een systeem toe te voegen. Voor fotonen geldt dus  $\mu = 0$ .

Voor elektronen en neutrino's ligt het wat ingewikkelder. Hier moeten we gebruik maken van een aantal relaties. Zo kunnen een elektron en een positron annihilieren in twee fotonen. Dat betekent dus dat de chemische potentialen van een deeltje en zijn antideeltje even groot maar tegengesteld zijn. Verder is bekend dat elektronen en muonen omgezet kunnen worden in neutrino's, volgens reacties als



Daarmee kan de volgende relatie voor de chemische potentiaal afgeleid worden

$$\mu_{e^-} - \mu_{\nu_e} = \mu_n - \mu_p \quad (3.4)$$

Dus er zijn in eerste instantie slechts drie onafhankelijke chemische potentialen. Voor deze potentialen nemen we  $\mu_p$ ,  $\mu_{e^-}$  en  $\mu_{\nu_e}$ . Vervolgens geldt er behoud van quantumgetallen: lading, baryongetal (aantal baryonen - aantal

antibaryonen) en elektron-leptongetal (aantal leptonen - aantal antileptonen).

De potentialen kunnen we bepalen met behulp van drie grootheden: ladingsdichtheid  $n_Q$ , baryondichtheid  $n_B$  en elektron-leptondichtheid  $n_e$ . De ladingsdichtheid  $n_Q$  is nul of vrijwel nul. Immers, het heelal wordt gedomineerd door de zwaartekracht en niet door de veel sterkere electromagnetische kracht. Ook de baryondichtheid  $n_B$  is verwaarloosbaar ten opzichte van de fotondichtheid (zie §3.1). Hieruit volgt dat de chemische potentiaal van alle geladen deeltjes verwaarloosbaar is.

Voor ongeladen deeltjes is er nog niets af te leiden. Dat ook de chemische potentiaal van neutrino's nul is, komt voort uit de aanname dat  $n_e$  veel kleiner is dan de stralingsdichtheid  $n_\gamma$ . Deze aanname is gebaseerd op het feit dat  $n_B \ll n_\gamma$ , en lijkt daarom redelijk. Hieruit volgt de benadering

$$n_Q = n_B = n_e = 0 \quad (3.5)$$

Omdat de chemische potentialen van deeltjes en antideeltjes even groot maar tegengesteld zijn, kan uit deze aanname voor de dichtheden afgeleid worden dat

$$\mu_p = \mu_{e^-} = \mu_{\nu_e} = 0 \quad (3.6)$$

Wij zullen dan ook overal in dit verslag uitgaan van de gedachte dat de chemische potentiaal te verwaarlozen is. Zie ook [3]

### 3.3 Bepaling van de stralingsdichtheid

Nu kunnen we verder gaan met het afleiden van de dichtheidsverdeling. We kunnen (3.3) invullen in (3.2), en samen met de relatie  $E = cp$  levert dit de volgende relatie voor de energiedichtheid<sup>1</sup>:

$$\rho = \frac{g}{2} \frac{(kT)^4}{\pi^2 (\hbar c)^3} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x \pm 1} \quad (3.7)$$

met de plusminus voor respectievelijk fermionen en bosonen. Hierin is de integraal exact uit te rekenen, en levert  $\frac{\pi^4}{15}$  voor bosonen en  $\frac{7\pi^4}{120}$  voor fermionen. Wanneer we werken in natuurlijke eenheden, dus  $\hbar = k = c = 1$ , levert dit de volgende factoren op ( $a$  is de constante van Stefann, per definitie de voorfactor voor fotonen):

---

<sup>1</sup>Zie de bijlagen voor een uitwerking

$$\text{fotonen (g=2): } aT^4 = \frac{\pi^2}{15}T^4 \quad (3.8)$$

$$\text{elektronen (g=2): } \frac{7}{8}aT^4 = \frac{7}{8}\frac{\pi^2}{15}T^4 \quad (3.9)$$

$$\text{neutrino's (g=1): } \frac{7}{16}aT^4 = \frac{7}{16}\frac{\pi^2}{15}T^4 \quad (3.10)$$

Deze bijdragen zijn rechtstreeks in vergelijking (3.1) in te vullen als we schrijven

$$\rho = \frac{1}{2}g_*aT^4 \quad (3.11)$$

De totale numerieke factor in deze vergelijking is per definitie  $g_*$  en is de gewogen som van alle vrijheidsgraden van het gas:

$$g_* \equiv \sum_{\text{bosonen}} g_i + \frac{7}{8} \sum_{\text{fermionen}} g_i$$

Echter, elektronen en neutrino's hebben elk een anti-deeltje, dat ook meedoet in deze vergelijking, wat betekent dat de bijdragen met twee vermenigvuldigd mogen worden. Verder bestaan er meerdere neutrinosoorten, zodat deze waarde ook nog met  $N_\nu$  (het aantal soorten) vermenigvuldigd moet worden. Dit alles levert voor de energiedichtheid de volgende relatie op<sup>2</sup>:

$$\epsilon = \frac{1}{2}(0 + 2 \times 2 \times \frac{7}{8} + N_\nu \times 2 \times 1 \times \frac{7}{8} + 2)aT^4 \quad (3.12)$$

Ook voor andere fasen in van het heelal kan je op deze manier  $g_*$  uitrekenen. Hieronder staat een tabel met de bijdragen van enkele deeltjes aan  $g_*$ , waarmee eenvoudig  $g_*$  voor de verschillende fasen van het door ons beschouwde heelal uit te rekenen is.

Soort deeltje	bijdrage $g_*$
fotonen	2
elektronen	$2 \times 2 \times \frac{7}{8}$
neutrino's (per soort)	$2 \times 1 \times \frac{7}{8}$

Samenvattend kunnen we de Friedmann-vergelijking als volgt schrijven (met  $\hbar = k = c = 1$ ):

$$H = \sqrt{\frac{4\pi^3 G g_*}{45}} T^2 \quad (3.13)$$

---

<sup>2</sup>Algemeen wordt er van uit gegaan dat er drie soorten neutrino's zijn: het elektron-neutrino  $\nu_e$ , het muon-neutrino  $\nu_\mu$  en het tau-neutrino  $\nu_\tau$ .  $N_\nu$  is dan 3, waardoor  $g_* = \frac{43}{4}$ .

# Hoofdstuk 4

## Reacties in het vroege heelal

### 4.1 De begrippen ont koppeling en uitvriezen

In het vroege heelal zijn alle deeltjes met elkaar in thermisch evenwicht. Fotonen, neutrino's, elektronen, positronen en het kleine beetje baryonen interageren allemaal nog met elkaar. Ondertussen dijt het heelal uit en op een gegeven moment kan het zijn dat het heelal door de expansie dusdanig is afgekoeld, dat de snelheid waarmee de deeltjes reageren te laag wordt om de expansiesnelheid van het heelal 'bij te houden'. Bepaalde reacties zullen da dus te verwaarlozen zijn. Wanneer bepaalde deeltjes niet meer kunnen reageren met de rest van de deeltjes, noemen we dat ont koppeling van die deeltjes. Deze deeltjes zijn dan niet meer in thermisch evenwicht met de andere deeltjes en koelen dus onafhankelijk van de rest van het heelal af. Er ontstaat een achtergrond.

Wanneer deeltjes in thermisch evenwicht zijn, gekoppeld dus, koelen ze af door de uitdijning van het heelal. De afkoeling van het heelal gaat met  $\frac{1}{R}$ . Dit is als volgt in te zien: hiervoor hebben we al verteld dat de volgende relaties gelden:  $\rho = \frac{1}{2}g_*aT^4$  (§3.3) en  $\rho \propto R^{-4}$  (§2.3). Als we dit combineren volgt er vanzelf uit:

$$TR = \text{constant} \quad (4.1)$$

Maar ook als de deeltjes ont koppeld zijn, koelen ze op dezelfde manier af door de expansie van het heelal. De ont koppelde deeltjes mogen dan niet meer in thermisch evenwicht zijn met de rest van het heelal, ze zijn als sub-systeem nog wel in evenwicht. Voor de afkoeling van de deeltjes in het heelal maakt het dus niet uit of ze ont koppeld zijn of niet.

Echter, er is een fase in de evolutie van het heelal, waarin elektronen en positronen met elkaar gaan annihilieren. Bij elke annihilatie ontstaan twee fotonen; het thermisch evenwicht wordt verstoord. Immers, als ergens meer



fotonen bij komen, stijgt de temperatuur. Er ontstaat een temperatuurverschil, waar we in §4.1 verder op in gaan. In deze fase zijn neutrino's al ontkoppeld; de neutrino-achtergrond koelt dus onafhankelijk van de rest van het heelal af. Fotonen zijn nog wel gekoppeld en als gevolg van de annihilaties koelen de fotonen tijdelijk relatief minder snel af.

Zoals gezegd ontkoppelen deeltjes als hun reactiesnelheid kleiner wordt dan de expansiesnelheid van het heelal:

$$\Gamma \approx H \tag{4.2}$$

Voor ons is het belangrijk om de temperatuur te bepalen waarop dit gebeurt.

## 4.2 De reactiesnelheid $\Gamma$

De reactiesnelheid  $\Gamma$  van een deeltje is evenredig met de dichtheid  $n$  van de trefdeeltjes. Wanneer er meer deeltjes zijn, zullen er sneller reacties optreden. Ook is de reactiesnelheid evenredig met de snelheid  $v$  van de deeltjes; hoe sneller de deeltjes, hoe meer reacties, dus een grotere reactiesnelheid. Tenslotte is  $\Gamma$  evenredig met de werkzame doorsnede  $\sigma$  van de deeltjes. De werkzame doorsnede is op te vatten als het frontale oppervlak van de deeltjes en als dat groter is, zullen er eerder reacties plaatsvinden. Statistisch gezien hebben niet alle deeltjes dezelfde snelheid en werkzame doorsnede en moeten we dus de gemiddelde waarde nemen,

$$\Gamma = \langle n\sigma v \rangle \tag{4.3}$$

Als de neutrino's ontkoppelen, betekent dat dat de zwakke reacties stoppen: de reactie  $e^+ + e^- \longleftrightarrow \nu + \bar{\nu}$  verloopt bijvoorbeeld geen enkele kant meer op. Om de temperatuur te bepalen wanneer de neutrino's ontkoppelen, moeten we dus naar de reactiesnelheid kijken van deze reactie. De snelheid van neutrino's is gelijk aan de lichtsnelheid,  $v = c$ . In dit relativistische en quantummechanische geval gelden voor de dichtheid en de werkzame doorsnede van leptonen de volgende relaties:

$$n = \frac{g T^3}{2 \pi^2} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x + 1} = \frac{3g T^3}{4 \pi^2} \zeta(3) \tag{4.4}$$

$$\langle \sigma \rangle \propto G_F^2 T^2 \tag{4.5}$$

In deze formules hebben we  $k = c = \hbar = 1$  gesteld. Bovendien is  $\zeta(3)$  de Riemann-Zeta-functie (ongeveer 1,20) en  $G_F$  is de Fermiconstante ( $G_F = 1,166 \cdot 10^{-5} GeV^{-2}$ ). In deze eenheden is de Newtonconstante overigens gelijk aan:  $G = 6,7 \cdot 10^{-39} GeV^{-2}$ . In (4.4) is  $g$  gelijk aan het aantal

vrijheidsgraden van de neutrino's:  $g = 2$ . Vullen we de relaties (4.4) en (4.5) in vergelijking (4.3) in en stellen we dat gelijk aan vergelijking (3.13), krijgen we een relatie tussen de ontkoppelingstemperatuur en  $g_*$ ; dus met het aantal neutrinosoorten:

$$CG_F^2 T^5 = \Gamma = H = \sqrt{\frac{4\pi^3 G g_*}{45}} T^2 \quad (4.6)$$

of anders

$$T^3 = \sqrt{\frac{4\pi^3 G g_*}{45}} \frac{1}{CG_F^2} \quad (4.7)$$

Hierin is  $C$  een corrigerende constante, die wij zullen bepalen als we onze resultaten ijken aan de waarnemingen. Dat we zo'n factor nodig hebben, komt door de werkzame doorsnede; de precieze factoren daar kennen wij niet (daarvoor is kennis van de quantumveldentheorie nodig). Uit [4] halen we voor  $\Gamma$  de constanten  $\frac{7\pi}{60}(1 + 3g_A^2)$ , met  $g_A$  de axiale vector koppelingsconstante ( $g_A = 1.267$ ). Dit gecombineerd met (4.4), geeft ons een mogelijke waarde voor de constante in (4.7):  $C = \frac{2}{3}\zeta(3) \frac{7\pi^3}{60}(1 + 3g_A^2) \approx 11.668$ . Deze constante blijkt een goede waarde voor de ontkoppelingstemperatuur in het geval dat er drie neutrinosoorten zouden zijn. Want als we de temperatuur gaan uitrekenen met de al eerder genoemde  $g_* = \frac{43}{4}$ , krijgen we dit als resultaat:

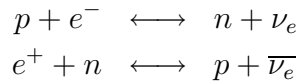
$$T \approx 0,65 MeV$$

Deze temperatuur wordt ook gegeven door onder meer [4] en [5]. We nemen dus aan dat we de goede corrigerende factor hebben gevonden en verder in dit verslag gaan we dus ook van die waarde uit.

Wanneer de waarde van de gevonden temperatuur ingevuld wordt in de formule voor de neutron-proton verhouding, is die verhouding bekend op het moment dat de neutrino's ontkoppeld zijn. Deze verhouding verandert nog door het neutronverval.

### 4.3 De neutron-proton verhouding

De neutron-proton verhouding in het heelal bepaalt de hoeveelheid helium, maar wordt zelf bepaald door het moment waarop de reacties met neutronen en protonen stoppen, zoals:



Deze reacties verlopen niet meer als de neutrino's ontkoppeld zijn.

Om baryonen te kunnen beschrijven maken we gebruik van de Maxwell-Boltzmann-distributie. Dit is toegestaan, omdat zowel neutronen als protonen niet relativistisch<sup>1</sup> zijn. Voor een Maxwell-Boltzmann-distributie geldt (zie ook bijlage A):

$$n_i = \frac{g_i}{\hbar^3} \left( \frac{m_i kT}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} e^{\left( \frac{\mu_i - m_i c^2}{kT} \right)} \quad (4.8)$$

waarin  $n_i$  het aantal deeltjes,  $g_i$  de vrijheidsgraden van de spin,  $m_i$  de massa en  $\mu_i$  de chemische potentiaal van deeltjessoort  $i$  is. Voor neutronen en protonen is het spingetal  $g$  gelijk aan 2. De chemische potentialen bepalen we als volgt: in evenwichtsreacties moet de totale chemische potentiaal aan de linkerkant van de reactiepijl gelijk zijn aan de totale chemische potentiaal aan de rechterkant. Voor de bovenstaande reacties kunnen we dus schrijven:

$$\begin{aligned} \mu_p + \mu_{e^-} &= \mu_n + \mu_{\nu_e} \\ \mu_{e^+} + \mu_n &= \mu_p + \mu_{\bar{\nu}_e} \end{aligned}$$

Al eerder hebben we gezien dat de chemische potentialen van de leptonen gelijk zijn aan nul (§3.2). Hieruit halen wij het belangrijke resultaat dat de chemische potentialen van de neutronen en de protonen aan elkaar gelijk zijn:

$$\mu_n = \mu_p \quad (4.9)$$

Wanneer we de Maxwell-Boltzmann-distributie van neutronen delen door die van protonen krijgen we de volgende relatie tussen het aantal neutronen en protonen (de n-p-ratio):

$$\begin{aligned} \frac{n_n}{n_p} &= \frac{\frac{g_n}{\hbar^3} \left( \frac{m_n kT}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} e^{\left( \frac{\mu_n - m_n c^2}{kT} \right)}}{\frac{g_p}{\hbar^3} \left( \frac{m_p kT}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} e^{\left( \frac{\mu_p - m_p c^2}{kT} \right)}} \\ \implies \frac{n_n}{n_p} &= \left( \frac{m_n}{m_p} \right)^{\frac{3}{2}} e^{\left( \frac{m_p c^2 - m_n c^2}{kT} \right)} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Deze relatie geldt zolang er evenwicht is. Maar zodra neutrino's ontkoppelen, blijft er nog maar één belangrijke reactie over: het neutronverval. Dit is geen evenwichtsreactie. In deze formule moeten wij de temperatuur invullen, waarbij de neutrino's ontkoppelen. We krijgen dan een verhouding van neutronen en protonen. Deze verhouding wordt alleen nog veranderd door het neutronverval.

---

<sup>1</sup>De massa van baryonen is ongeveer  $939 \text{ MeV}$  en de temperatuur ligt in de buurt van  $1 \text{ MeV}$ . De  $e$ -macht in de Fermi-Dirac-distributie wordt dus erg groot en we kunnen overgaan op de Maxwell-Boltzmann-verdeling.

## 4.4 Het neutronverval

Neutronen zijn instabiele nucleonen met een vervaltijd  $\tau = 889s$ . Zodra de heliумыnsynthese begint, worden alle neutronen ingevangen in de heliumkernen. In die gebonden toestand zijn neutronen wel stabiel en vallen ze niet uit elkaar. Het neutronverval vindt dus alleen plaats tussen het ontkoppelen van de neutrino's en de heliумыnsynthese. Dit is slechts een beperkte tijd; in de orde van de vervaltijd van het neutron.

Het neutron valt als volgt uit elkaar:

$$n \longrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

De vervalvergelijking voor neutronen luidt:

$$n_n = n_{n0}e^{-t/\tau} \quad (4.11)$$

Hierin is  $n_{n0}$  het aantal neutronen vóór het verval en  $\tau$  is de vervaltijd. Omdat voor elk neutron dat vervalt, er een nieuw proton bij komt, geldt voor de hoeveelheid protonen (met  $n_{p0}$  de beginhoeveelheid):

$$n_p = n_{p0} + n_{n0} - n_n \quad (4.12)$$

Voor de ontwikkeling in de tijd van de neutron-proton verhouding delen we (4.11) en (4.12) door elkaar:

$$\frac{n_n}{n_p} = \frac{n_{n0}e^{-t/\tau}}{n_{p0} + n_{n0} - n_n} = \left( e^{t/\tau} \left( \frac{n_{p0}}{n_{n0}} + 1 \right) - 1 \right)^{-1} \quad (4.13)$$

De waarde van  $\frac{n_{p0}}{n_{n0}}$  is de uitkomst van vergelijking (4.10), wanneer daar de temperatuur is ingevuld, die uit vergelijking (4.7) komt. Dit is dus allemaal een functie van  $g_*$  en dus van het aantal neutrinosoorten. Met deze, voor het neutronverval gecorrigeerde neutron-proton verhouding kunnen we de heliumfractie in het heelal gaan bepalen.

## 4.5 Kosmisch helium en het aantal neutrinosoorten

In het vroege heelal, vóór de vorming van helium, waren er naast fotonen en leptonen, ook neutronen en protonen. Bij een bepaalde temperatuur gingen die baryonen helium vormen. Twee neutronen en twee protonen gingen samen als het stabiele atoom  ${}^4He$ . Alle neutronen werden hiervoor gebruikt,

maar er bleven nog protonen over: nu de waterstofatomen  $H$ . Andere elementen en isotopen van waterstof en helium werden in veel mindere mate gevormd.

Stel er was een neutronendichtheid  $n_n$  en een protonendichtheid van  $n_p$  in het vroege heelal. Alle neutronen werden gebruikt voor de synthese van helium en er zitten twee neutronen in één heliumatoom. Er is dan een heliumdichtheid van  $\frac{1}{2}n_n$ . Elk heliumatoom weegt ongeveer vier keer zoveel als een proton, dus de massafractie  $Y$  van helium is:

$$Y_{He} = \frac{4 * \left(\frac{1}{2}n_n\right)}{n_n + n_p} = \frac{2n_n}{n_n + n_p} = \frac{2\frac{n_n}{n_p}}{\frac{n_n}{n_p} + 1} \quad (4.14)$$

Omdat de temperatuur waarbij de neutrino's ontkoppelen, afhangt van  $g_*$  is  $\frac{n_{p0}}{n_{n0}}$  ook een functie daarvan. Ook  $\frac{n_n}{n_p}$  is dan een functie van het aantal neutrinosoorten en uiteindelijk de heliumfractie dus ook. Nu kunnen we dus gaan kijken hoe de massafractie van helium afhangt van het aantal neutrinosoorten, met in ons achterhoofd de wetenschap dat in het heelal uit waarnemingen volgt:  $Y_{He} \approx 0,24$ . In de bijlage zit een Mathematica-programma bijgesloten, waarin we onze berekeningen deden. Daar valt ook duidelijk te zien dat  $Y_{He}$  inderdaad een functie is van het aantal neutrinosoorten.

Figuur 4.1: De heliumproductie als functie van het aantal soorten neutrino's

# Hoofdstuk 5

## Achtergrondstraling

### 5.1 Temperatuursverschil van de achtergronden

In het heelal zijn nu twee achtergronden van straling: één van fotonen en één van neutrino's, ieder met een andere temperatuur. De temperatuur van de achtergrondfotonen kunnen we meten, maar dat is tot nu toe niet mogelijk bij de neutrino-achtergrond. Wel kunnen we het verschil in die temperaturen berekenen; wanneer de neutrino's namelijk nergens meer interactie mee hebben - dus als de neutrino's ontkoppelen - neemt hun temperatuur af met de expansie van heelal. De temperatuur van fotonen zou in feite ook afnemen met de uitdijing van het heelal, ware het niet dat door verschillende reacties fotonen geproduceerd en verbruikt worden, waardoor de fotonenstraling tijdelijk minder snel afkoelt. De temperatuur van de fotonen is dus, tijdens de annihilaties waarbij fotonen gevormd worden, niet evenredig met de expansie. De fase van annihilaties duurt echter niet lang; vóór deze fase koelen neutrino's en fotonen dus op de zelfde manier af met de expansie en daarna ook. Het verschil is dat vóór de annihilaties ze een gelijke temperatuur hebben en daarna niet.

We hebben al eerder gezien hoe de temperatuur afneemt als functie van de schaalfactor:

$$TR = \text{constant} \quad (5.1)$$

De entropie  $S$  in het heelal is constant, als  $g_*$  constant is; het heelal dijt adiabatisch uit. De entropiedichtheid  $s$  vermenigvuldigd met de inhoud van een met het heelal mee-expanderend volume is dan ook constant:

$$\frac{d}{dt} (sR^3) = 0 \implies sR^3 = \text{constant} \quad (5.2)$$

De totale entropie in het heelal is de som van de entropieën van de afzonderlijke deeltjes:

$$S = S_{e^\pm} + S_\gamma + S_\nu + S_b$$

$S_b$  is hierin te verwaarlozen, omdat we hier het stralingsgedomineerde heelal bekijken. In deze fase van het heelal is de temperatuur nog zo hoog dat elektronen en positronen wel relativistisch zijn:  $m_b c^2 \gg kT > m_e c^2$ , waardoor  $s_b \propto e^{-m_b/kT}$  te verwaarlozen is.

We hebben nu drie belangrijke aannames, waarmee we verder kunnen in de afleiding van het temperatuursverschil. Uit de statistische fysica kennen we de Euler-relatie:

$$E = TS - pV + \mu N \quad (5.3)$$

Als we dit delen door het volume  $V$ , krijgen we:

$$\epsilon = \rho c^2 = Ts - p + \mu n \quad (5.4)$$

waarin  $\epsilon$  de energiedichtheid is. Bovendien geldt  $\mu = 0$ , vanwege de eerdere redenatie (§3.2). Dus:

$$\epsilon = Ts - p \implies s = \frac{\epsilon + p}{T} \quad (5.5)$$

Vullen we voor fotonen de relativistische formules  $p = \frac{1}{3}\epsilon$  en  $\epsilon = aT^4$  in formule (5.5) in, krijgen we:

$$s = \frac{4}{3}aT^3 \quad (5.6)$$

Deze formule geldt alleen voor fotonen; voor de andere deeltjes (elektronen, positronen en neutrino's) moet er nog een voorfactor bij, namelijk die factoren die besproken zijn in §3.3:

$$\begin{aligned} s_\gamma &= \frac{4}{3}aT^3 \\ s_{e^\pm} &= \left(2 * \frac{7}{8}\right) \frac{4}{3}aT^3 \\ s_\nu &= \left(N_\nu * 2 * \frac{7}{8} * \frac{1}{2}\right) \frac{4}{3}aT^3 \end{aligned}$$

met  $N_\nu$  het aantal soorten neutrino's. De totale entropiedichtheid is nu:

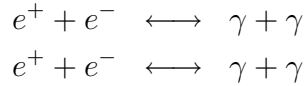
$$s = s_\gamma + s_{e^\pm} + s_\nu = \frac{4}{3}aT^3 \left(1 + \frac{14}{8} + \frac{7}{8}N_\nu\right) \quad (5.7)$$

De totale entropiedichtheid in het heelal is nu dus bekend. De enige variabele hierin is nu de temperatuur. Vóórdat de neutrino's ontkoppelen,

hebben alle deeltjes dezelfde temperatuur  $T_1$ . Ook de temperatuur van de neutrino's is hier nog aan gelijk:

$$T_{\nu,1} = T_1 \quad (5.8)$$

In dit vroege heelal annihileren positronen en elektronen vooral volgens de volgende reacties:



Bij een temperatuur van de orde van de elektronmassa gaan deze reacties vooral naar rechts, zodat de abundanties van de elektronen en positronen in het heelal erg afnemen. Bij een lagere temperatuur stoppen de reacties en op dat moment zijn er geen reacties meer waar neutrino's aan meedoen. De neutrino's ontkoppelen dus omtrend die tijd. Vanaf dat moment gaan de neutrino's verder met hun eigen temperatuur  $T_\nu$ . De fotonen reageren nog met de weinige elektronen en positronen, waardoor die niet ontkoppeld zijn. Omdat de abundanties van de elektronen en positronen sterk zijn afgenomen, is hun entropie verwaarloosbaar klein:  $s_{e^\pm} = 0$ . Immers, de dichtheid van de elektronen is zo laag, dat  $\epsilon$  en  $\rho$  erg klein zijn. Volgens formule (5.5) is dan ook de entropiedichtheid te verwaarlozen.

De entropie van de neutrino's is vóór de fase van de annihilaties gelijk aan de entropie daarna. Immers, de neutrino's koelen gewoon af met de expansie van het heelal en merken niets van de annihilaties:

$$s_{\nu,1} = s_{\nu,2}$$

In de entropievergelijking kunnen we dus de entropie van de neutrino's weglaten. Voor en na de annihilatiefase is de entropie:

$$s_{\gamma,1} + s_{e^\pm,1} = s_{\gamma,2} \quad (5.9)$$

Dit kunnen we, met behulp van formules (5.2), (5.8) en (5.1) ook schrijven als:

$$\begin{aligned} g_{*,1} T_1^3 R_1^3 &= g_{*,2} T_2^3 R_2^3 \\ \implies \frac{g_{*,1}}{g_{*,2}} &= \frac{T_2^3 R_2^3}{T_1^3 R_1^3} = \frac{T_2^3 R_2^3}{T_1^3 R_1^3} = \frac{T_2^3}{T_{\nu,2}^3} \end{aligned} \quad (5.10)$$

Hierin is  $g_{*,1}$  nog mét bijdragen van elektronen en positronen en  $g_{*,2}$  niet meer.

$$\frac{g_{*,1}}{g_{*,2}} = \frac{\frac{22}{8}}{1} = \frac{11}{4} \implies T_2 = \left(\frac{11}{4}\right)^{\frac{1}{3}} T_{\nu,2} \quad (5.11)$$



Dus na het ontkoppelen van de neutrino's is de temperatuur van de fotonen  $\sqrt[3]{\frac{11}{4}} \approx 1,401$  keer zo hoog als de temperatuur van de neutrino's. De fotonen-temperatuur is nu 2,728 K, dus de temperatuur van de neutrino-achtergrond is 1,947 K. Omdat de termen met de entropie van de neutrino's niet meetellen, maakt het niet uit voor de temperatuur van de neutrino-achtergrond hoeveel soorten neutrino's er bestaan.

## 5.2 Neutrino's en donkere materie

In de zoektocht naar donkere materie spelen neutrino's een belangrijke rol. Op grond van recente experimenten (bijvoorbeeld Super Kamiokande [6], een lijst met experimenten is te vinden op [7]) is er reden om aan te nemen dat neutrino's een kleine massa bezitten. Omdat er zo veel neutrino's in ons heelal zijn, kan deze kleine massa echter grote gevolgen hebben. Het is namelijk niet ondenkbaar dat neutrino's een deel van de donkere materie vertegenwoordigen.

In deze paragraaf willen wij een schatting maken van de maximale massa die een neutrino kan hebben. We zullen hiervoor gebruik maken van de aanname dat het heelal vlak is. De baryonendichtheid is veel te laag om dit te bereiken, dus zou een eventuele neutrino-dichtheid hier kunnen helpen. We zullen uitrekenen hoeveel massa een neutrino moet hebben om een heelal gevuld met alleen neutrino's vlak te maken.

Om te beginnen moeten we uitrekenen wat de neutrino-dichtheid is. Hiervoor kunnen we de formule

$$n = \frac{g}{2} \frac{(kT)^3}{\pi^2 c^3 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x + 1} \quad (5.12)$$

gebruiken. De afleiding staat in de bijlage, het plusteken in de formule staat er omdat neutrino's fermionen zijn.

De uitkomst van de integraal is  $\frac{3}{2}\zeta(3) \approx 1,80$ . De formule om de neutrino-dichtheid te berekenen wordt dus:

$$n = \frac{g}{4} \frac{3(kT)^3}{\pi^2 c^3 \hbar^3} \zeta(3) \approx 7,60 g T^3 \text{ cm}^{-3} \quad (5.13)$$

De temperatuur van de neutrino-achtergrond is (nog) niet te meten. Wel kan deze theoretisch berekend worden (zie §5.1). De temperatuur van de neutrino-achtergrond is ongeveer 1.95 K. Verder moeten we  $g$  nog invullen. Hiervoor gaan we uit van  $N_\nu$  neutrinosoorten met elk hun antideeltje. Dit levert  $g = 2 \times N_\nu$ . Hieruit volgt dan een dichtheid van  $112 \times N_\nu$  neutrino's per  $\text{cm}^3$ .

De kritieke dichtheid van het heelal wordt gegeven door de volgende relatie, waarin we de huidige waarde van de Hubble-snelheid hebben ingevuld:

$$\rho_c(t) = \frac{3H(t)^2}{8\pi G} = 0,79 * 10^{-26} \text{kg m}^{-3} = 4,46 \text{keV cm}^{-3} \quad (5.14)$$

Hiermee is gemakkelijk de massalimiet van een neutrino te bepalen, ervan uitgaande dat neutrino's het heelal kritisch maken:

$$m_\nu c^2 = \frac{\rho_c}{n_\nu} \approx \frac{39}{N_\nu} \text{eV} \quad (5.15)$$

Dit levert bij het huidige bekende, en door ons gevonden, aantal neutrino-soorten een neutrinomassa van 13 eV. Deze waarde is de gemiddelde massa van de drie neutrino-soorten. Deze drie soorten zorgen elk voor een bijdrage van  $\frac{1}{3}$  aan de totale neutrinoflux.

De bovenlimiet van elektronneutrino's is 2,2 eV [8] en ligt ver onder de hier bepaalde massalimiet. Echter, de massalimiet van muon-neutrino's is 170 keV en voor tau-neutrino's zelfs 15.5 MeV. Het is duidelijk dat dit resultaat een duidelijke restrictie is op de massalimiet van muon- en tau-neutrino's.

## Hoofdstuk 6

### Conclusie en discussie

Het is duidelijk dat het aantal neutrino's invloed heeft op de heliumproductie. Hoe meer soorten neutrino's, hoe meer helium. Wij kunnen geen uitsluitel geven over het exacte aantal soorten neutrino's. Hiervoor is onze onzekerheidsmarge te groot. Voor een betere bepaling zal je gebruik moeten maken van een reactienetwerk, en zal een aantal formules iets anders opgezet moeten worden. Het resultaat is dan wel dat je een computersimulatie zal moeten gebruiken om uitkomsten te krijgen. Dit is ook gedaan, en hieruit volgt dat er ruimte is voor drie maximaal neutrinosoorten. Dit is in overeenstemming met experimenten in deeltjesversnellers.

Verder is duidelijk geworden dat een neutrino met massa een goede kandidaat kan zijn voor donkere materie. De bepaling van een massalimiet voor neutrino's levert een bruikbaar resultaat op. De massalimiet van het elektron-neutrino mag dan wel ruim onder de door ons gevonden massalimiet van  $13 \text{ eV}/c^2$  vallen, de massalimieten van het muon- en tau-neutrino doen dat zeker niet. Hier kan de kosmologie dus strengere eisen opleggen aan de eigenschappen van deeltjes dan de experimenten in de deeltjesversnellers.

# Bijlage A

## Distributiefunctie en dichtheid

De energiedichtheid

$$\rho = g \int f_{eq} E d^3p \quad (\text{A.1})$$

moet eerst worden omgeschreven voordat we deze kunnen gebruiken. Om te beginnen vullen we de verdelingsfunctie  $f_{eq}$  [9] in<sup>1</sup>:

$$f_{eq} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/(kT)} \pm 1}$$

Deze functie geeft het aantal deeltjes per  $d^3p$  per volume. Vervolgens maken we gebruik van de relatie  $E = cp$ . Met behulp hiervan is de energiedichtheid om te schrijven naar

$$\rho = \frac{g}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \frac{cp}{e^{(pc)/(kT)} \pm 1} d^3p$$

Hierna gebruiken we  $d^3p = 4\pi p^2 dp$ , zodat we de volgende relatie verkrijgen

$$\rho = \frac{g}{2} \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{cp^3 dp}{e^{(cp)/(kT)} \pm 1}$$

Hierin stellen we

$$x = \frac{cp}{kT}$$

zodat we de relatie kunnen omschrijven naar

$$\rho = \frac{g}{2} \frac{(kT)^4}{\pi^2 (c\hbar)^3} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x \pm 1} \quad (\text{A.2})$$

Hier zien we de gezochte vergelijking.

---

<sup>1</sup>We zijn uitgegaan van  $\mu = 0$  op grond van de redenering in §3.2.

Dit verhaal kunnen we ook gebruiken om het aantal deeltjes per volume-eenheid te bepalen,

$$n = g \int f_{eq} d^3p \quad (\text{A.3})$$

Het verschil is een factor  $E = cp$ , dus gebruik makend van de vorige afleiding kan nu gemakkelijk een nieuwe relatie opgeschreven worden:

$$n = \frac{g}{2} \frac{(kT)^3}{\pi^2 c^3 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x \pm 1} \quad (\text{A.4})$$

# Bijlage B

## Het programma

# Bibliografie

- [1] Steven Weinberg. *Gravitation and cosmology*, hoofdstuk 15.1. John Wiley & Sons, New York, 1972.
- [2] Achterberg. *Van oerknal via niets tot straling en stof*, hoofdstuk 6.1. Epsilon, Utrecht, 1994.
- [3] Steven Weinberg. *Gravitation and cosmology*, hoofdstuk 15.6. John Wiley & Sons, New York, 1972.
- [4] Kolb & Turner. *The early universe*, hoofdstuk x.x. Uitgeverij x, Ergens, 2000.
- [5] Dolgov. naam. *Physical Review Letters*, Maand 1900.
- [6] Y. Fukunda e.a. Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos. *Physical Review Letters*, Juli 1998.
- [7] Maury Goodmann. The neutrino oscillation industry. <http://www.hep.anl.gov/ndk/hypertext/nuindustry.html>, 23 Mei 2002.
- [8] Julia Peltoniemi. Neutrino mass date page. <http://cupp oulu.fi/neutrino/nd-mass.html>, 21 Juli 2000.
- [9] Daniel Schroeder. *Thermal Physics*, hoofdstuk 7.2. Addison Wesley Longman, San Fransico, 2000.